湍流研究中的若干问题

吴锤结

Web page: http://aa.dlut.edu.cn/cjwu.html

Email: cjwudut@dlut.edu.cn

大连理工大学航空航天学院

（2016 年 12 月 24 日）

提　纲

1. 湍流统计理论

- 1　湍谱分析中的问题
- 2　湍流统计理论的不自恰性
- 3　均匀各向同性湍流与非均匀各向同性湍流

2. 湍流数值模拟

- 4　湍流直接数值模拟
- 5　湍流大涡模拟的动力学亚网格模式
- 6　DES 等湍流混合模式数值模拟方法

3. 湍流研究的展望

1. 湍流统计理论

湍谱分析中的问题

- 湍谱分析的基本思想：将一个在空间或时间作随机变化的物理过程，通过 Fourier 分析，分解成由许多具有不同波长或频率的简谐波叠加而成。
- 湍谱分析：以一维湍谱为例。固定空间点 x，考察其上脉动速度随 t 的变化 $u(t)$，应用 Fourier 分析，

$$u(t) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} I(n) e^{i2\pi nt} \mathrm{d}n$$

$$I(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i2\pi nt} \mathrm{d}t$$

变换存在的条件是 $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| \mathrm{d}t$ 收敛。对准定常湍流，$\because t \to \infty$ 时，$|u(t)| \not\to 0$。故上述积分不存在 $\longrightarrow$Fourier 变换不存在。

- 掐头去尾的湍谱分析：定义：

$$u_T(t) = \begin{cases} u(t), & -\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2}, T\text{充分大}. \\ 0, & t < -\dfrac{T}{2}, \text{或} t > \dfrac{T}{2}. \end{cases}$$

对应的 Fourier 变换为：

$$u_T(t) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} I_T(n) e^{i2\pi nt} \mathrm{d}n$$

$$I_T(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_T(t) e^{-i2\pi nt} \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} u(t) e^{-i2\pi nt} \mathrm{d}t$$

$\because u_T(t)$ 是实函数 $\longrightarrow I_T^*(-n) = I_T(n)$。

- 时空关联函数的 Fourier 变换：因在正、负无穷处的时空关联函数值等于零，所以时空关联函数的 Fourier 变换存在。
- 湍流统计理论中的问题：**基本上不用掐头去尾的 Fourier 分析。**

湍流统计理论的不自恰性

- 湍流统计理论的基本方法与工具：谱分析和尺度分析
- 湍流统计理论的基本方程 Karman-Howarth 方程：从流体力学的基本方程 Navier-Stokes 方程出发，推导出各个关联函数或谱函数所满足的动力学方程 Karman-Howarth 方程。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u^2}f\right)-\left(\overline{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(k'+\frac{4}{r}k\right)=2\nu\overline{u^2}\left(f''+\frac{4}{r}f'\right)$$

其中，f 是空间的二元纵向速度关联系数 $f(r)$，k 是空间的三元纵向速度关联系数 $k(r)$。

- 最小湍流尺度 – 内尺度 η：$\eta=\left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$，其中，总能量耗散速度 $\epsilon=15\nu\frac{\overline{u^2}^2}{\lambda}$，$\lambda$ 是 Taylor 微尺度。$\eta<\lambda$。

- 湍流统计理论的不自恰性: 在湍流统计理论中已证明: $\dfrac{L}{\eta} \sim R_L^{\frac{3}{4}}$, 其中 $R_L = \dfrac{u'L}{\nu}$, L 为湍流中的最大尺度, 它与平均运动的特征长度相当, 而最小尺度取决于粘性耗散速度。

  当 Reynolds 数 $\uparrow\uparrow \longrightarrow \eta \downarrow\downarrow$, 当 η 小于分子平均自由程时 $\longrightarrow$Navier-Stokes 方程失效 $\longrightarrow$Karman-Howarth 方程失效。

  由湍流统计理论的基本方法和工具可以推出湍流统计理论的基本方程失效, 所以湍流统计理论不自恰。

- 解决湍流统计理论不自恰的方法: 给出物理上的限制条件。

均匀各向同性湍流与非均匀各向同性湍流

- Roberson 代数不变量定理 (1940)：如果张量具有各向同性特性，则可利用 Roberson 代数不变量定理对其各阶关联张量进行简化。
- 湍流统计理论中大量结果均是基于各向同性条件的：如：二元速度关联函数 $R_{ij}=F(f)$、三元速度关联函数 $S_{ijk}=F'(k)$、

Karman-Howarth 方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u^2}f\right)-\left(\overline{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(k'+\frac{4}{r}k\right)=2\nu\overline{u^2}\left(f''+\frac{4}{r}f'\right)$$

以及由此得到的湍能耗散方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\overline{u_iu_i}=-15\nu\frac{\overline{u^2}}{\lambda^2}$$

涡量衰变方程:

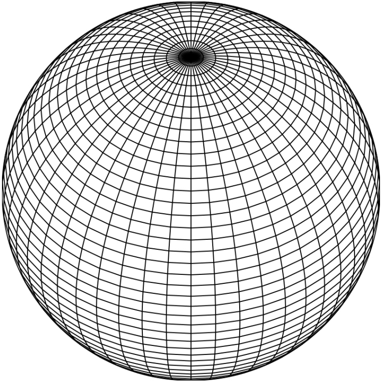
$$\frac{\mathrm{d}\overline{\omega^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{7}{3\sqrt{15}}\left(\overline{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(s - \frac{2G}{R_\lambda}\right)$$

其中，$R_\lambda = \dfrac{\sqrt{\overline{u^2}}\lambda}{\nu}$。普适平衡理论也是在各向同性条件下得到的，所以 Kolmogorov 的 $-\dfrac{5}{3}$ 次方谱定律:

$$E(k,t) = A\epsilon^{\frac{3}{2}}k^{-\frac{5}{3}}, K_e \ll k \ll K_d.$$

也是在各向同性条件下得到的。

- 均匀各向同性与非均匀各向同性:



均匀各向同性的球，特征量：直径

非均匀各向同性的棍，特征量：长度

- 在非均匀各向同性湍流中的误用：将均匀各向同性湍流中的参数、方程、特性用来描述非均匀各向同性湍流 (如固壁附近的湍流) 是非常荒唐的，就像用球的直径来描述棍的特征一样荒唐。但这种做法普遍存在于湍流研究中。

2. 湍流数值模拟

湍流直接数值模拟

- 湍流直接数值模拟的要求:

1. 在湍流统计理论中已证明：$\dfrac{L}{\eta} \sim R_L^{\frac{3}{4}}$，其中：$R_L = \dfrac{u'L}{\nu}$，$L$ 为湍流中的最大尺度，它与平均运动的特征长度相当，而最小尺度取决于粘性耗散速度，即内尺度 $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{\frac{1}{4}}$。

2. 为了模拟湍流流动，计算区域应大到足以包含最大尺度的涡；同时计算网格的尺度应小到足以分辨最小涡的运动。因此总网格数至少应不少于

$$N \sim R_L^{\frac{9}{4}}$$

3. 计算要模拟的时间长度应大于大涡的时间尺度 $\frac{L}{u'}$，而计算的时间步长又应小于小涡的时间尺度 $\frac{\eta}{u'}$。因此计算的时间步数应不小于 $\frac{L}{\eta} \sim R_L^{\frac{3}{4}}$。故总的计算量正比于 R_L^3。

- 湍流直接数值模拟的要求: 当 Reynolds 数 $\uparrow\uparrow \longrightarrow \eta \downarrow\downarrow$, 当 η 小于分子平均自由程时 $\longrightarrow$Navier-Stokes 方程失效 $\longrightarrow$ 必须换用 Boltzmann 方程。
- 存在问题: 所研究的流体力学问题确实是满足连续介质假设的，但在做高 **Reynolds** 数湍流直接数值模拟时却要中途换方程，这是非常荒唐的。
- 解决高 Reynolds 数湍流直接数值模拟问题的方法: 给出小尺度物理上的限制条件。

- 陈十一: 没有约束的大涡模拟是危险的。⟶没有陈十一的大涡模拟是危险的。⟶ 有了陈十一的大涡模拟也可能是危险的。
- 动力学亚网格模式及推导中的问题: 基于 Bardina 等的尺度相似概念, Germano 等提出动力学亚网格模式, 其模式参数在不同时空点随当地流动状况而变化。动力学模式的关键是利用尺度相似概念, 采用两重滤波, 即: 网格滤波和测试滤波, 从两重滤波应变率张量所提供的最小已解尺度的信息构造亚网格模式。

在动力学模式中网格滤波函数为 $\overline{G}$, 由此定义的大尺度场为

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}) = \int \overline{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') f(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}' \tag{1}$$

它所对应的滤波网格宽度为 $\overline{\Delta}$。测试滤波函数为 $\widehat{G}$, 此时与之对

应的大尺度量用$\widehat{\ }$表示，所以

$$\widehat{f}(\boldsymbol{x}) = \int \widehat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')f(\boldsymbol{x}')d\boldsymbol{x}' \tag{2}$$

它所对应的滤波网格宽度为 $\widehat{\Delta}$。这里，设 $\overline{\Delta} < \widehat{\Delta}$，即测试滤波所对应的网格宽度比网格滤波的宽，所以有

$$\widehat{\overline{G}} = \widehat{G}\overline{G} \tag{3}$$

将测试滤波算子作用于经网格滤波后的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \dfrac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

上式中的 τ_{ij} 称为湍流亚网格应力

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j \tag{5}$$

由于一般地, u_i 和 u_i' 未知, 所以必须对 τ_{ij} 建立模型, 进行模拟。由 (4) 得

$$\frac{\partial \widehat{\overline{u}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \widehat{\overline{p}}}{\partial x_i} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \widehat{\overline{u}}_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{6}$$

其中亚测试尺度应力 T_{ij} 为

$$T_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j \tag{7}$$

定义已解尺度湍流应力 $\mathcal{L}_{ij}$ 为

$$\mathcal{L}_{ij} = \widehat{\overline{u}_i \overline{u}_j} - \widehat{\overline{u}}_i \widehat{\overline{u}}_j \tag{8}$$

此处, $\mathcal{L}_{ij}$ 是将网格滤波和测试滤波联系起来的 Leonard 张量, 它的尺度介于二者之间。$\mathcal{L}_{ij}$ 与亚网格应力 τ_{ij} 和亚测试尺度应力 T_{ij} 的关系是

$$\mathcal{L}_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij} \tag{9}$$

尺度相似假设认为亚测试尺度应力 T_{ij} 与亚网格应力 τ_{ij} 具有相同的函数形式, 即

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\tau_{kk} = -2C_d\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij} \tag{10}$$

$$T_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}T_{kk} = -2C_d\widehat{\overline{\Delta}}^2|\widehat{\overline{S}}|\widehat{\overline{S}}_{ij} \tag{11}$$

其中

$$\widehat{\overline{S}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widehat{\overline{u}}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\widehat{\overline{u}}_j}{\partial x_i}\right) \tag{12}$$

$$|\widehat{\overline{S}}| = \sqrt{2\widehat{\overline{S}}_{ij}\widehat{\overline{S}}_{ij}} \tag{13}$$

将 (10)、(11) 代入 (9), 得

$$\mathcal{L}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}\mathcal{L}_{kk} = -2C_dM_{ij} \tag{14}$$

其中

$$M_{ij}=\widehat{\Delta}^2|\widehat{\overline{S}}|\widehat{\overline{S}}_{ij}-\overline{\Delta}^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij} \tag{15}$$

由于 $\mathcal{L}_{ij}$ 和 M_{ij} 所涉及的量均为已解尺度, 故它们可由直接计算得到。动力学模式参数 C_d 必须依赖流场局部特点求得。由 (14), Germano 等建议采用下式求 C_d

$$C_d=-\frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{ij}\overline{S}_{ij}}{M_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{16}$$

但是在 (14) 中包含 5 个独立的方程, 而所要求的未知量仅 C_d 一个, 因此存在超定问题。**为了解决这一问题, Lilly 采用最小二乘法, 忽略 $C_d(\boldsymbol{x},t)$ 是时间和空间的函数, 将其提到滤波操作 $\widehat{}$ 之外。**定义残差 Q 为

$$Q=(\mathcal{L}_{ij}-\frac{\delta_{ij}}{3}\mathcal{L}_{kk}-2C_dM_{ij})^2 \tag{17}$$

令

$$\frac{\partial Q}{\partial C_d} = 0 \tag{18}$$

即可求得 C_d 的极值为

$$C_d = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{L}_{ij}M_{ij}}{M_{ij}^2} \tag{19}$$

这里, 在 (14) 和 (17) 中的各向同性项因在不可压流中有 $S_{ii}=0$, 所以它们在 (16) 和 (19) 中不再出现。

- 存在问题:

1. 推导时不顾 C_d 是时空函数强行将其提出滤波运算之外;

2. $M_{ij} \simeq 0$ 时使得采用动力学亚网格模型时计算不稳定。

- 湍流大涡模拟方法:

1. 湍流大涡模拟的基本思想

采用滤波函数将流动变量 $f(\boldsymbol{x},t)$ 分解成大尺度量 $\overline{f}(\boldsymbol{x},t)$ 和小尺度量 $f'(\boldsymbol{x},t)$, 即

$$f(\boldsymbol{x},t)=\overline{f}(\boldsymbol{x},t)+f'(\boldsymbol{x},t) \tag{1}$$

其中,

$$\overline{f}(\boldsymbol{x},t)=\int G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')f(\boldsymbol{x}',t)d\boldsymbol{x}' \tag{2}$$

式中 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ 为滤波函数。将 (1) 带入 Navier-Stokes 方程和连

续性方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t}+\dfrac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\
\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i}=0
\end{cases}
\tag{3}
$$

即可得到大尺度 $\overline{f}(\boldsymbol{x},t)$ 满足的大涡模拟方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial t}+\dfrac{\partial \overline{u}_i \overline{u}_j}{\partial x_j}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\dfrac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}-\dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\
\dfrac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i}=0
\end{cases}
\tag{4}
$$

上式中的 τ_{ij} 称为湍流亚网格应力

$$
\tau_{ij}=\overline{u_i u_j}-\overline{u}_i \overline{u}_j \tag{5}
$$

由于一般地，u_i 和 u_i' 未知，故必须对 τ_{ij} 建立模型。大涡模拟的基本出发点基于如下假设：亚网格小尺度结构往往对流场的大尺

度结构不敏感依赖，且对边界条件等的影响不敏感。因此它比大尺度结构更为一般，易于模拟，便于建立模式。

- 湍流模式理论：由湍流脉动运动动量方程与连续性方程

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t}+U_j u_{i,j}+u_j U_{i,j}+u_j ui,j &= -\frac{1}{\rho}p_{,i}+\nu u_{i,jj}+\overline{(u_i u_j)}_{,j} \\ u_{i,j} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{6}$$

得到 Reynolds 应力 $\overline{u_i u_j}$ 的动力学方程

$$\frac{\mathrm{D}\overline{u_i u_j}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\left[-\overline{u_i u_j u_l}-\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\delta_{ij}u_i+\delta_{ij}u_j\right)}+\nu\frac{\partial\overline{u_i u_j}}{\partial x_l}\right]}{\partial x_l}$$

$$-\left(\overline{u_i u_l}\frac{\partial U_j}{\partial x_l}+\overline{u_j u_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}\right)-2\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}}+\frac{1}{\rho}\overline{p\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)} \tag{7}$$

湍流动能方程

$$\frac{\mathrm{D}k}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial x_l}\left[-\overline{k'u_l}-\frac{1}{\rho}\overline{pu_l}+\frac{\partial k}{\partial x_l}\right]-\overline{u_iu_l}\frac{\partial U_i}{\partial x_l}-\epsilon \tag{8}$$

其中，$k'=\frac{1}{2}u_iu_i$，$\epsilon=\nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}}$。

- 湍流大涡模拟的滤波方法与湍流模式理论的平均方法:

1. 滤波方法

为了将流动变量 $f(\boldsymbol{x},t)$ 分解为大尺度量 $\overline{f}(\boldsymbol{x},t)$ 和小尺度量 $f'(\boldsymbol{x},t)$, 采用给定的滤波函数 $G(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)$, 于是

$$\begin{cases}\overline{f}(\boldsymbol{x},t)=\int_\Omega G(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)f(\boldsymbol{y},t)d\Omega\\ f'=f-\overline{f}\end{cases} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ 为网格坐标。常用的滤波函数有 Box 滤波函数、Fourier 滤波函数以及 Gauss 滤波函数, 分述如下。

1.1 Box 滤波函数

Deardorff 给出 Box 滤波函数

$$G(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}, & \text{若}|x_i-y_i|\le\dfrac{\Delta x_i}{2}\quad(i=1,2,3)\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{10}$$

其中 Δx_i 为网格尺度。Box 滤波其实就是在以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的立方体单元上的体积平均。它的特点是简单，并且直接在物理空间中进行滤波。

1.2 Fourier 滤波函数

在谱空间中与 Box 滤波函数对应的是 Fourier 滤波函数，它的定义是

$$G_k(k)=\begin{cases}1, & \text{若}|k|\le k_c\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{11}$$

即将所有大于 k_c 的波数所对应的小尺度量截去。它在物理空间

的形式为

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(k) e^{-ikx} dk \tag{12}$$

Fourier 滤波的优点是能清楚地将对应于小尺度的高波数量滤去。

1.3 Gauss 滤波函数

Gauss 滤波函数的提出是为了克服 Box 滤波和 Fourier 滤波中存在的负值和难以求微分等缺点。它在物理空间和谱空间中都具有很好的性能，但计算较为复杂。在谱空间中其形式是

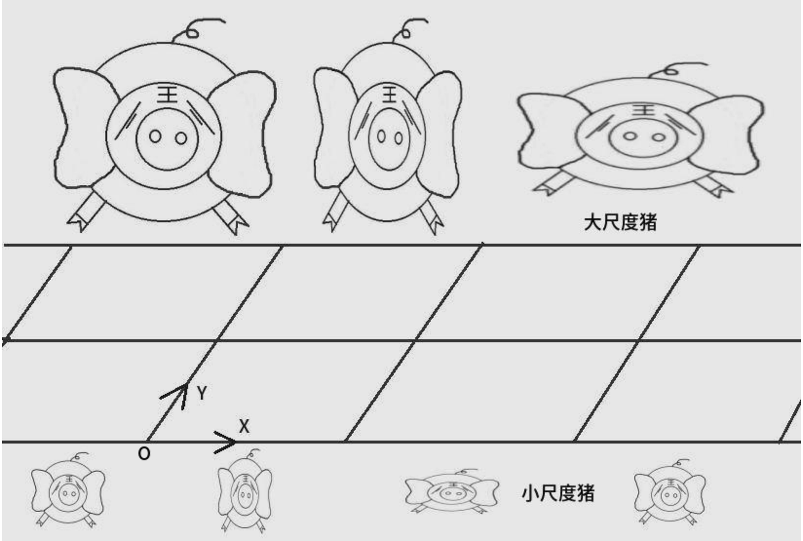
$$G_k(k) = e^{-k^2 \frac{\Delta^2}{24}} \tag{13}$$

其在物理空间中的对应形式是

$$G(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) = \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{6}{\pi \Delta^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{6(x_i - y_i)^2}{\Delta^2} \right) \tag{14}$$

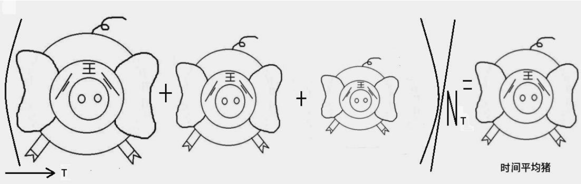
可见它的 Fourier 变换也是 Gauss 型函数。

1.4 滤波的实质：滤掉亚网格量，得到大尺度量。

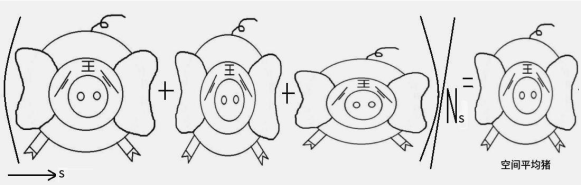


2. 平均方法

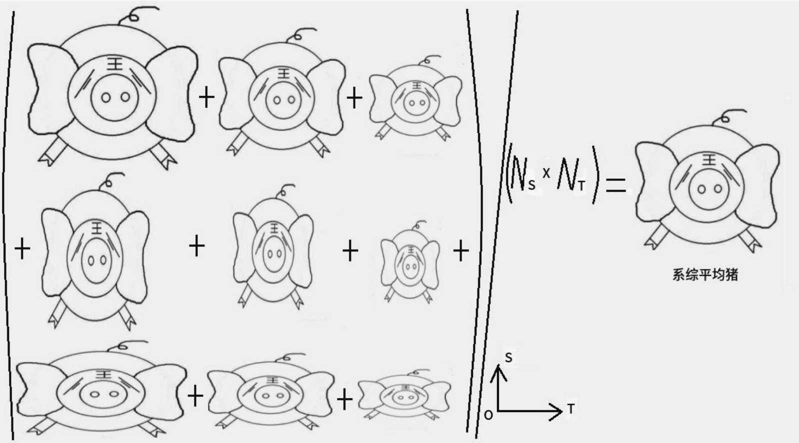
2.1 时间平均：对同一猪，在不同时间。



2.2 空间平均：对不同猪，在同一时间。



2.3 系综平均：对不同猪，在不同时间。



- DES 等混合方法的基本思想: 为了避免大涡模拟对壁面附近极密网格的要求，在壁面附近采用 RANS 等湍流模式，而在远离壁面采用大涡模拟，二者交界部分采用连接条件过渡。

- DES 等混合方法的概念错误:

1. 滤波运算与平均运算不兼容!

2. 得到的计算结果是湍流的大尺度量还是湍流的平均量?

- DES 等混合方法的正确解释: 在壁面附近采用的不是 RANS 等湍流模式，而是某种形式的湍流壁面模式。计算得到的结果是湍流的大尺度量。

- 为什么没人发现 DES 等混合方法的问题?
  - ⋆ 因为湍流界除了极少数人之外，没有人真正对湍流模式理论的计算结果进行平均运算 (时间平均或空间平均或系综平均或侧偏平均等), 也没有人真正对湍流大涡模拟进行滤波 (Box 滤波或富氏滤波或高斯滤波等)!
  - ⋆ 只有在均匀各向同性的条件下，各种平均运算才是等价的。除此之外，尽管湍流雷诺平均方程的形式一样，但在各种平均下

其结果不同。

⋆ 在 DES 中真正做了平均运算和滤波运算，他立刻就会发现这两种运算无法兼容。

- **这说明在湍流数值模拟研究中几乎所有人都在不同程度地糊弄！**

3. 湍流研究的展望

- **非均匀各向同性湍流理论**
  - ⋆ 周培源的“先求解后平均‘’与”先平均后求解”;
  - ⋆ 均匀各向同性湍流理论不是非均匀各向同性湍流理论的一阶近似，而是其零阶近似;
  - ⋆ 在基于均匀各向同性湍流理论的基础上修修补补，意义不大，几乎可以预计不可能取得突破性进展;
  - ⋆ 用拼计算能力的方法 (如 DNS) 永远无法解决湍流问题;
  - ⋆ 适用于湍流研究的数学理论还未出现;
  - ⋆ 非均匀各向同性湍流理论是真正有志者的最佳研究领域，其重要性比从古至今和直到解决湍流问题为止的所有学科的所有诺贝尔奖的总和还要大。

为什么？

1. 难，太难了！

2. 重要，太重要!
3. 湍流没有严格的数学定义。

⋆ 基于最优动力系统理论的湍流基元的非均匀各向同性湍流理论?

- **在湍流研究中特别要注意基本概念，不要人云亦云!**


Thanks!