

可压缩湍流时空耦合低维动力系统建模方法研究、 湍流数值模拟建模理论基础再探究

齐进

北京应用物理与计算数学研究所

吴锤结

大连理工大学航空航天学院

电子邮件: cjwudut@dlut.edu.cn

2021 年湍流和流动稳定性专题研讨会, 上海

提 纲

第一部分：可压缩湍流时空耦合低维动力系统建模方法研究

一. 研究目标

- 1 湍流研究与时空耦合低维动力系统方法
- 2 研究的出发点
- 3 经典 Galerkin 谱方法与时空耦合低维动力系统方法比较
- 4 时空耦合低维动力系统方法的优越性

二. 基础理论

- 5 基本思想
- 6 一般问题
- 7 不同的目标泛函
- 8 多尺度全局优化算法

三. 可压缩时空耦合低维动力系统建模方法

9 可压缩 Navier-Stokes 方程

10 可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统建模方法

11 可压缩时空耦合低维动力系统建模方法的求解步骤

四. 可压缩时空耦合低维动力系统建模算例

12 全场余量相对误差和全场各阶流场变量占比定义

13 三维可压缩后台阶流

14 三维可压缩湍流直射流

15 三维 Richtmyer-Meshkov 不稳定性中的湍流

五. 创新点与后续工作

16 创新点

17 后续工作

第二部分：湍流数值模拟建模理论基础再探究

六. 湍流数值模拟建模理论基础

18 传统的湍流数值模拟建模理论基础及其错误

19 正确的湍流数值模拟建模理论基础

20 大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC)

七. 湍流封闭性问题及其数值解法

八. 结论

第一部分：可压缩湍流时空耦合低维动力系统建模 方法研究

一. 研究目标

湍流研究与时空耦合低维动力系统方法

(1) 问题

- 湍流理论的关键难点:

- ★ 各向异性;
- ★ 时空耦合动力学特性.

- 湍流数值模拟:

- ★ 目的: 研究给定系统参数 (如 Re 数) 下湍流场随时间的演化;
- ★ 要求: 高精度、低耗散低色散数值格式;
- ★ 模式: 具备各向异性和时空耦合特性的 RANS 模式和 SGS 模式.

(2) 对策: 时空耦合低维动力系统方法

- 时空耦合低维动力系统建模:

- ★ 关键: 满足各类边界条件; 全局谱精度;
- ★ 方法: 齐次化 (✗); 基函数满足边界条件 (✓); 边界影响法 (✓);

★ **本质**: 利用建立在拟序结构 (**内禀基: 满足给定目标泛函和边界条件的内禀坐标系的基函数**) 之上的低维动力系统建模方法, 将求解给定系统参数下流场随时间演化的 CFD 方法转译成针对物理特性建模、既精准定量又深入定性研究的时空耦合低维动力系统建模和分析工具.

● 时空耦合低维动力系统定性分析:

★ **湍流的维数估计**: 拟序结构 \sim 内禀坐标系 \sim 耗散系统维数;

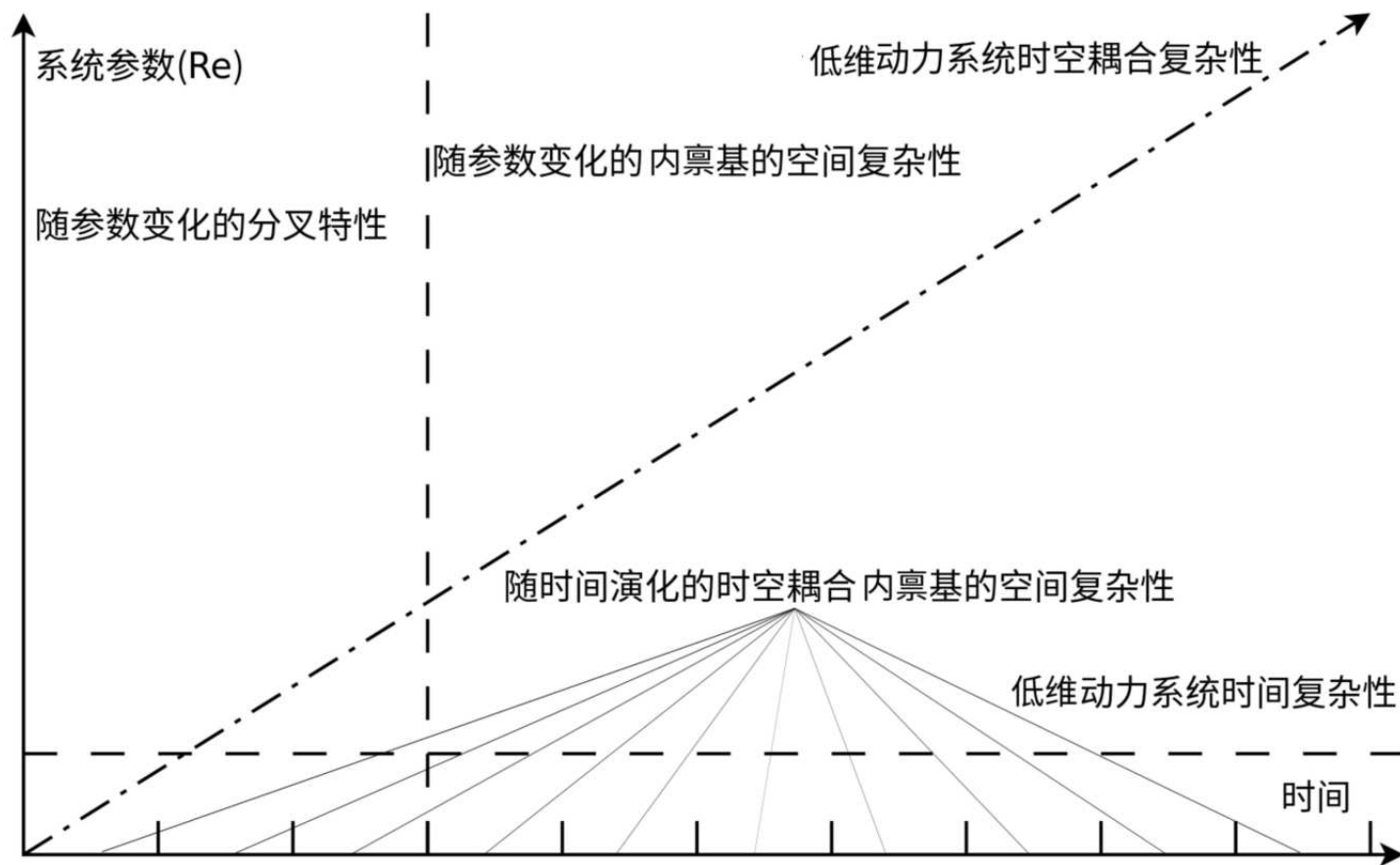
★ **湍流的时间复杂性**: 经典动力系统分析方法;

★ **湍流的空间复杂性**: 斑图动力学方法:

- 给定系统参数下时空耦合内禀基随时间演化的空间复杂性;
- 时空耦合内禀基随系统参数变化时的空间复杂性.

★ **湍流的时空复杂性**: **时空耦合动力系统分析方法**:

- 基于各阶时空耦合内禀基的湍流场随时间的演化;
- 给定系统参数下湍流场随时间的演化;
- 时空耦合内禀基随系统参数变化时的时间演化过程;
- 湍流场随系统参数变化时的时间演化过程.



时空耦合低维动力系统定性分析示意图

- 湍流数值模拟: 大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC);
- 湍流基元: 时空耦合广义螺旋波涡.

研究的出发点

(1) 谱展开

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \boldsymbol{\xi}_k \\ &= \mathbf{u}_N + \mathbf{u}_R \\ &\approx \sum_{k=1}^N a_k(t) \boldsymbol{\xi}_k\end{aligned}$$

- 基函数 $\boldsymbol{\xi}_k$: 亦称谱函数;
- 经典谱展开: $\boldsymbol{\xi}_k$ 为已知空间基, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_k(\mathbf{x})$.

(2) 如何创新?

- 内禀基: $\boldsymbol{\xi}_k$ 为表征系统时均特征的空间内禀基, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_k^*(\mathbf{x})$;
- 时空耦合内禀基: $\boldsymbol{\xi}_k$ 为表征系统时空特征的时空耦合内禀基, $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_k^*(\mathbf{x}, t)$.

(3) 动力系统的基函数

与问题无关的基函数:

- ◇ Fourier 基、Chebyshev 基、Legendre 基 ...;

与问题相关的基函数:

- ◇ POD 基;
- ◇ 内禀空间基;
- ◇ 时空耦合内禀基.

(4) 内禀基的数学特性

- 完备性: **NO**
- 正交性: **YES**
- 内禀坐标系线性无关性: **NO**

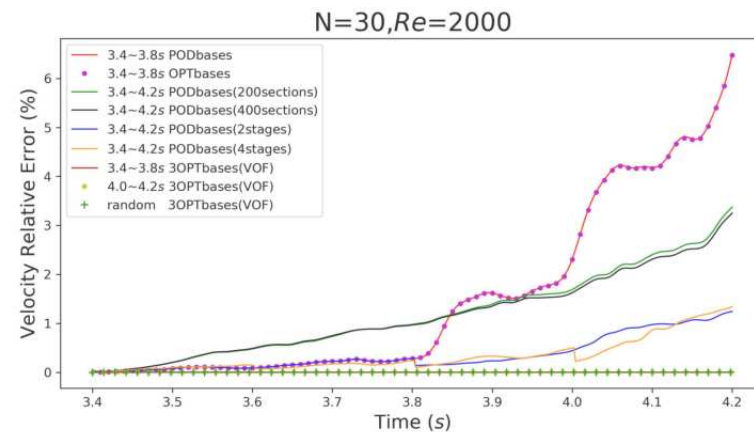
(5) 低维动力系统构建的主要因素

- 函数空间的类型: 正交性、不可压、...;
- 目标泛函的构造: 关注的系统物理特性;
- 内禀基的类型: 空间内禀基、时空耦合内禀基;
- 具体研究对象: 控制方程、初始条件和边界条件等;
- 时段的长短 T : T 越大, 弱解时均效应越明显; $T = \Delta t$, 强解时空耦合;
- 截断的阶数 N .

经典 Galerkin 谱方法与时空耦合低维动力系统方法比较

(1) 经典 Galerkin 谱方法:

- 全局谱精度;
- 满足稳定性和相容性;
- 基函数为满足边界条件 (周期或无滑移) 的已知空间基函数 (充分条件);
- 采用 POD 基和各种空间基函数: 不具备预测性; 分段空间基可减小误差; 时空耦合内禀基误差最小.



(2) 时空耦合低维动力系统建模方法:

- 全局谱精度;
- 满足稳定性和相容性;
- 基函数是时空耦合内禀基 $\xi_k(\mathbf{x}, t)$;
- 对不可压流满足 $u_{i,i} = 0$;
- 时空耦合内禀基的阶数 N 极低.

(3) 时空耦合低维动力系统建模方法的关键难点:

- 定量精准;
- 时空耦合内禀基;
- 基函数满足任意边界条件时出现的一对多的不确定性问题: 没有唯一解.
- 维数极低的内禀基 (维数 = 展开阶数 $N \times$ 独立变量个数).

时空耦合低维动力系统方法的优越性

- **传统动力系统方法的局限性**: 无法在精确定量比对基础上建立定性研究的动力系统模型, 因为仅当**经典谱展开的阶数极大 (成百上千维)**时才能达到精确定量比对的要求, 但采用高维动力系统模型进行湍流长期特性研究的计算量极大. 所以传统的动力系统研究都采用维数很低的动力系统模型 (如三维 Lorenz 模型), 但**低维模型的本质动力系统特性很可能与真实湍流的本质动力系统特性完全不同**(即, 它们处在函数空间的不同区域中);
- **时空耦合低维动力系统方法的优越性**: 由于在精确定量比对基础上建立的湍流时空耦合低维动力系统不但与真实湍流的本质动力系统处于**函数空间同一区域中**, 而且其时空耦合内禀基 (拟序结构) 是维数极低的内禀基 (例如三个可压缩时空耦合内禀基 =15 维动力系统), 因此:

采用维数极低的时空耦合低维动力系统

- (a) 可得到真实湍流的本质动力学特性;
- (b) 可得到湍流的时间复杂性、空间复杂性和时空耦合复杂性等信息;
- (c) 可通过合适的目标泛函得到不同物理意义的湍流动力系统特征;
- (d) 可大大降低湍流动力系统长期特性研究的计算量.

二. 基础理论

基本思想

将系统变量近似表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^N a_k(t) \boldsymbol{\xi}_k$$

其中 a_k 与 $\boldsymbol{\xi}_k$ 均为未知函数;

- 将偏微分方程组在未知基函数上进行 Galerkin 投影;
- 应用非线性泛函分析和最优控制理论求出满足目标泛函的 $a_k(t)$ 和 $\boldsymbol{\xi}_k$;
- 分析所得低维动力系统得到系统的动力学特性.

一般问题

- 设一般非线性初边值算子方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + N(\mathbf{u}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) |_{\partial\Omega} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), & t > 0 \end{cases}$$

$N: \mathcal{H} \subset \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$: 线性或非线性算子;

$\mathcal{H}, \mathcal{V}, \mathcal{F}$ 和 \mathcal{G} : Hilbert 空间;

$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}}$ 和 $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$: 在 \mathcal{H}, \mathcal{F} 和 \mathcal{V} 中的内积;

$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{V}}^{1/2}, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$: 在 \mathcal{V} 中的范数.

- 假设: 初边值问题适定.
- 定义空间:

$$\mathcal{B}_N \triangleq \{ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N^T \mid \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{H}, (\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j) = \delta_{ij} \}$$

- 流动变量的谱展开

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_N(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^N a_k(t) \boldsymbol{\xi}_k,$$

其中 $a_k(t)$ 满足

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_N}{\partial t} + N(\mathbf{u}_N), \boldsymbol{\xi}_k \right) = 0, \\ a_k(0) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}_k). \end{cases} \quad 1 \leq k \leq N$$

- 将偏微分方程及其边界条件在未知基函数 $\boldsymbol{\xi}_k$ 上进行形式 Galerkin 投影, 得到动力系统方程

$$\begin{cases} \dot{a}_k(t) = F_k(a_k; \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N; \nabla \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \nabla \boldsymbol{\xi}_N, \dots), \\ a_k(0) = (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi}_k). \end{cases}$$

- 由研究目的确定目标泛函 $J(\boldsymbol{\xi})$.
- 构成数学问题: 求解 $\boldsymbol{\xi}^* \in \mathcal{B}_N$, 使得 $J(\boldsymbol{\xi}^*) = \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_N} J(\boldsymbol{\xi})$, 其中 $a_k(t)$ 满足 $\dot{a}_k(t) = F_k$.

不同的目标泛函

- 余量极小的目标泛函:

$$J(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) \triangleq \int_0^T (\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_R) dt$$

其中 $\mathbf{u}_R = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N$.

- 残差极小的目标泛函:

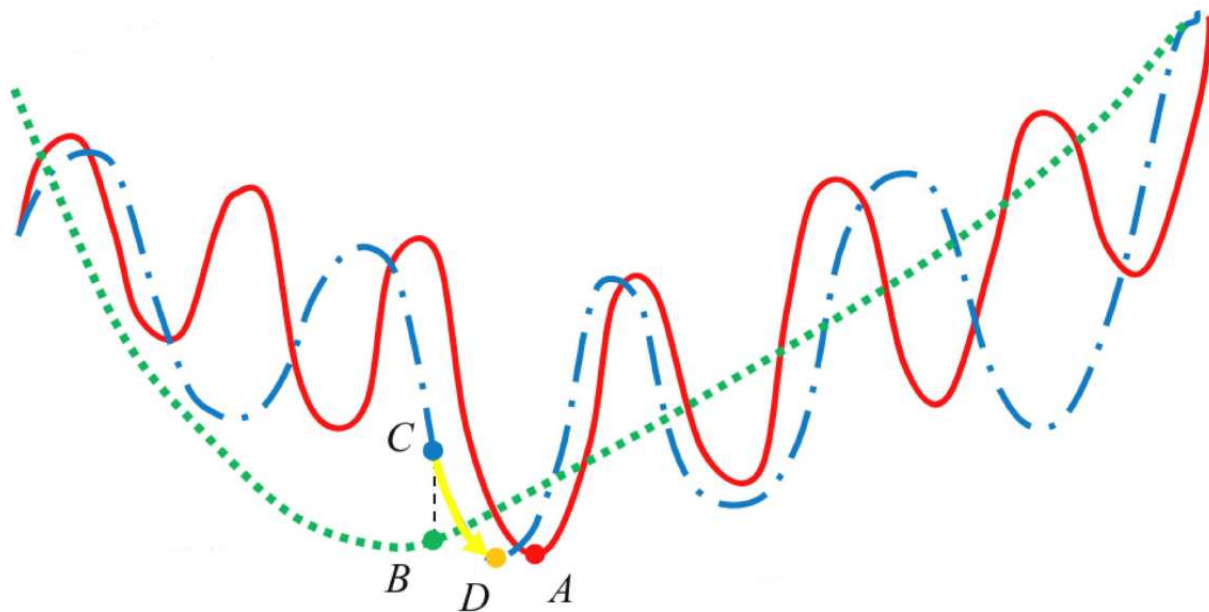
$$J(\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N) \triangleq \int_0^T (\mathbf{R}, \mathbf{R}) dt$$

其中 \mathbf{R} 是偏微分方程组的残差.

-

多尺度全局优化算法

- 采用局部优化方法只能求得局部极值点;
- 全局优化基本定理: Usually, one can not get the global optimal solution, unless infinity numbers of searches are carried out; (Torn & Zilinskas, 1989);
- 双尺度粗粒化近似全局优化方法:



三. 可压缩时空耦合低维动力系统建模方法

可压缩 Navier-Stokes 方程

(1) 有量纲可压缩 Navier-Stokes 方程

完整的有量纲可压缩 Navier-Stokes 方程组 (包含连续性方程、粘性系数 $\hat{\mu}$ 可变且具有第二粘性系数 $\hat{\mu}'$ 的动量方程、无外力对系统做功的能量方程、理想气体状态方程) 如下:

$$\begin{cases} \hat{\rho}_{,t} + (\hat{\rho}\hat{u}_j)_{,j} = 0 \\ \hat{u}_{i,t} + \hat{u}_j(\hat{u}_i)_{,j} = \hat{f}_i - \frac{1}{\hat{\rho}}\hat{p}_{,i} + \frac{1}{\hat{\rho}} [(\hat{\mu}' - \frac{2}{3}\hat{\mu})\hat{u}_{j,j}]_{,i} + \frac{1}{\hat{\rho}} [\hat{\mu}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})]_{,j} \\ \hat{h}_{,t} + \hat{u}_j\hat{h}_{,j} = \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{p}_{,t} + \hat{u}_j\hat{p}_{,j}) + \hat{\Phi} + \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{\kappa}\hat{T}_{,i})_{,i} + \hat{q}_R - \hat{q}_{i,i} \\ \hat{p} = \hat{\rho}R_g\hat{T} \end{cases}$$

其中, $\hat{h} = \hat{e} + \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}}$, \hat{e} 为比内能; $\hat{\kappa}$ 为热传导系数, $\hat{\Phi}$ 为耗散函数, $\hat{\Phi} = \frac{1}{\hat{\rho}}(\hat{\mu}' - \frac{2}{3}\hat{\mu})\hat{u}_{i,i}^2 + \frac{2\hat{\mu}}{\hat{\rho}}\hat{\epsilon}_{ij}\hat{\epsilon}_{ij}$, $\hat{\epsilon}_{ij}$ 为变形率张量, $\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})$; \hat{q}_R 为单位时间内辐射到系统内单位质量流体上的热量, $\hat{q}_{i,i}$ 为边界辐射的热流散度. \hat{f}_i 为质量力. 初始条件和边界条件依具体问题确定; R_g 为气体常数.

(2) 无量纲可压缩 Navier-Stokes 方程

采用特征长度 L_∞ ; 特征速度 U_∞ ; 特征时间 $t_\infty = L_\infty/U_\infty$; 特征密度 ρ_∞ ; 特征温度 T_∞ ; 特征声速 $c_\infty \equiv \sqrt{\gamma R_g T_\infty}$; 特征压力 $p_\infty = \rho_\infty c_\infty^2 / \gamma$; 特征动力学粘性系数 μ_∞ ; 特征热传导系数 κ_∞ , 特征质量力 $f_\infty = g_\infty$ (重力加速度); 取比热比 $\gamma \equiv C_p/C_v$ 取为 1.4, 其中, C_p 、 C_v 和 R_g 分别是等压比热、等容比热和气体常数. 理想气体状态方程 $p = \rho R_g T$, $R_g = \frac{R}{M}$, 气体常数 R_g 与气体种类相关, R 为与气体种类无关的普适气体常数, \tilde{M} 为气体摩尔质量.

定义四个控制参数为特征 Froude 数 $Fr \equiv \frac{U_\infty}{\sqrt{g_\infty L_\infty}}$, 特征 Prandtl 数 $Pr \equiv \frac{\mu_\infty \gamma R_g}{(\gamma - 1) \kappa_\infty}$, 特征 Reynolds 数 $Re \equiv \rho_\infty U_\infty L_\infty / \mu_\infty$ 和特征 Mach 数 $M \equiv U_\infty / c_\infty$. 特征 Prandtl 数取为 $Pr = 0.7$, 而参数 α 定义为 $\alpha \equiv Pr Re (\gamma - 1) M^2$.

设 $\hat{\mu}' = 0$, 在直角坐标系下, 不考虑高超声速的情形 (即不考虑流体电离辐射情形), 无量纲化后的三维非定常可压缩流体的 Navier-Stokes 方程组 (连续性方程、动量方程、能量方程、状态方程、初始条件和边界条件 (无流固边界))

为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{,t} + (\rho u_j)_{,j} = 0 \\ (\rho u_i)_{,t} + \left(\rho u_i u_j + \frac{p}{\gamma M^2} \delta_{ij} \right)_{,j} = \frac{1}{Fr^2} \rho f_i + \frac{1}{Re} \sigma_{ij,j} \\ E_{,t} + \left[\left(E + \frac{p}{\gamma M^2} \right) u_j \right]_{,j} = \frac{1}{\alpha} (\kappa T_{,j})_{,j} + \frac{1}{Re} (\sigma_{ij} u_i)_{,j} \\ p = \rho T \\ (u_i, \rho, E, T) = (u_i, \rho, E, T)|_{t=0} \\ (\rho, \rho_{,j} n_j)_{\partial\Omega} = (\rho_B, \rho_{B,j} n_j) \\ (u_i, u_{i,j} n_j)_{\partial\Omega} = (u_{Bi}, u_{Bi,j} n_j) \\ (T, T_{,j} n_j)_{\partial\Omega} = (T_B, T_{B,j} n_j) \end{array} \right.$$

其中, ρ 、 p 和 T 分别是无量纲化后的密度、压力和温度, u_i 是无量纲速度场. 这里, 热力学量的关系式采用了理想气体模型. 无量纲粘性应力张量 σ_{ij} 和无量纲总能量 E 分别定义如下:

$$\sigma_{ij} \equiv \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3} \mu \theta \delta_{ij}$$

$$E \equiv \frac{p}{(\gamma - 1) \gamma M^2} + \frac{1}{2} \rho (u_h u_h)$$

其中, $\theta = u_{i,i}$ 是无量纲化后的速度散度.

在可压缩湍流中, 需要考虑温度变化对动力学粘性和热传导系数的影响, 可用有量纲 Sutherland 公式进行计算:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{\infty} \left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{\infty}} \right)^{1.5} \frac{\hat{T}_{\infty} + \hat{C}}{\hat{T} + \hat{C}}$$

其中, \hat{T} 是有量纲温度.

对温度在 210K ~ 1900K 的空气, $\hat{T}_{\infty} = 273.15\text{K}$, $\hat{\mu}_{\infty} = 0.716 \times 10^{-4} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$, $\hat{C} = 110.6\text{K}$. 这里, 采用参考温度 $\hat{T}_{\infty} = 273.15\text{K}$ 和参考动力学粘性系数 $\hat{\mu}_{\infty} = 0.716 \times 10^{-4} \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^2}$ 对上式进行无量纲化, 得

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_{\infty}} = \left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{\infty}} \right)^{1.5} \frac{\hat{T}_{\infty} + \hat{C}}{\hat{T} + \hat{C}} = \left(\frac{\hat{T}}{273.15} \right)^{1.5} \frac{273.15 + 110.6}{\hat{T} + 110.6} \\ &= \frac{T^{1.5} \frac{273.15+110.6}{273.15}}{\frac{\hat{T}}{273.15} + \frac{110.6}{273.15}} = \frac{1.4049T^{1.5}}{T + 0.4049} \end{aligned}$$

其中, μ 为无量纲动力学粘性系数, T 为无量纲温度. 考虑到空气的 Prandtl 数对温度的变化不敏感, 而定压热容也是常数. 从而, 无量纲热扩散系数 κ 对温度

的依赖关系也可以用 Sutherland 公式近似描述:

$$\kappa = \frac{1.4049T^{1.5}}{T + 0.4049}$$

在 Sutherland 公式中的温度 T 是有量纲空间平均温度, 记为 \hat{T} . 因此正确的 Sutherland 公式的形式为

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \hat{\mu}_{\infty} \left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{\infty}} \right)^{1.5} \frac{\hat{T}_{\infty} + \hat{C}}{\hat{T} + \hat{C}} \\ \hat{\kappa} = \hat{\kappa}_{\infty} \left(\frac{\hat{T}}{\hat{T}_{\infty}} \right)^{1.5} \frac{\hat{T}_{\infty} + \hat{C}}{\hat{T} + \hat{C}} \end{cases}$$

其无量纲形式为

$$\begin{cases} \mu = \frac{1.4049\bar{T}^{1.5}}{\bar{T} + 0.4049} \\ \kappa = \frac{1.4049\bar{T}^{1.5}}{\bar{T} + 0.4049} \end{cases}$$

在时空耦合低维动力系统建模和动力系统分析时设 μ 和 κ 为常数, 其值由空间平均初始温度 \bar{T}_{∞} 和上式求得.

将 $p = \rho T$ 、 $\theta = u_{i,i}$ 和 $\alpha \equiv Pr Re(\gamma - 1)M^2$ 及 σ_{ij} 和 E 带入无量纲化后的三维非定常可压缩流体的 Navier-Stokes 方程组, 得到可压缩流动的无量纲标量

控制方程组 (包括连续性方程、三个标量动量方程和能量方程), 可求解 5 个流动变量 (ρ, T, u_j) .

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{,t} + (\rho u_j)_{,j} = 0 \\ (\rho u_i)_{,t} + \left(\rho u_i u_j + \frac{\rho T}{\gamma M^2} \delta_{ij} \right)_{,j} = \frac{1}{Fr^2} \rho f_i + \frac{\mu}{Re} \left[(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3} u_{h,h} \delta_{ij} \right]_{,j} \\ \left[\frac{\rho T}{(\gamma-1)\gamma M^2} + \frac{1}{2} \rho (u_h u_h) \right]_{,t} + \left\{ \left[\frac{\rho T}{(\gamma-1)\gamma M^2} + \frac{1}{2} \rho (u_h u_h) + \frac{\rho T}{\gamma M^2} \right] u_j \right\}_{,j} = \\ \quad \frac{\kappa}{Pr Re (\gamma-1) M^2} T_{,jj} + \frac{\mu}{Re} \left\{ \left[(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3} u_{h,h} \delta_{ij} \right] u_i \right\}_{,j} \\ (u_i, \rho, T) = (u_i, \rho, T) \Big|_{t=0} \\ (\rho, \rho_{,j} n_j)_{\partial\Omega} = (\rho_B, \rho_{B,j} n_j) \\ (u_i, u_{i,j} n_j)_{\partial\Omega} = (u_{Bi}, u_{Bi,j} n_j) \\ (T, T_{,j} n_j)_{\partial\Omega} = (T_B, T_{B,j} n_j) \end{array} \right.$$

可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统建模方法

(1) 可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统方程

定义研究问题所在的函数空间 \mathcal{B}_N^u 、 \mathcal{B}_N^ρ 和 \mathcal{B}_N^T 满足条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_N^\rho = \left\{ [\zeta_k]_{k=1}^N \mid \zeta_k \in \mathcal{H}^N(\Omega), \int_{\Omega} \zeta_k \zeta_l \, d\Omega = \delta_{kl}, \text{ 且 } \zeta_k \text{ 二阶可微} \right\} \\ \mathcal{B}_N^u = \left\{ [\xi_{ki}]_{k=1}^N \mid \xi_{ki} \in \mathcal{H}^N(\Omega), \int_{\Omega} \xi_{ki} \xi_{li} \, d\Omega = \delta_{kl}, \text{ 且 } \xi_{ki} \text{ 二阶可微} \right\} \\ \mathcal{B}_N^T = \left\{ [\eta_k]_{k=1}^N \mid \eta_k \in \mathcal{H}^N(\Omega), \int_{\Omega} \eta_k \eta_l \, d\Omega = \delta_{kl}, \text{ 且 } \eta_k \text{ 二阶可微} \right\} \end{array} \right.$$

分别将 u_i 、 ρ 和 T 表示为在函数空间 \mathcal{B}_N^u 、 \mathcal{B}_N^ρ 和 \mathcal{B}_N^T 中的低维近似形式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = b_k \zeta_k + \rho_R \approx b_k \zeta_k \\ u_i = a_k \xi_{ki} + u_{Ri} \approx a_k \xi_{ki} \\ T = c_k \eta_k + T_R \approx c_k \eta_k \end{array} \right.$$

其中, 截断阶数为 N 省略不写, 下同.

将上式代入可压缩流动无量纲标量控制方程组中, 得 (不含质量力项)

$$\left\{ \begin{aligned} & b_{l,t} \zeta_l + b_l a_k (\zeta_l \xi_{kj}),_{,j} = 0 \\ & (b_l a_k),_t \zeta_l \xi_{ki} + b_l a_k a_m (\zeta_l \xi_{ki} \xi_{mj}),_j + \frac{1}{\gamma M^2} b_l c_m (\zeta_l \eta_m \delta_{ij}),_j \\ & \quad - \frac{\mu}{Re} [a_k \xi_{ki,j} + a_k \xi_{kj,i} - \frac{2}{3} a_l (\xi_{lh,h} \delta_{ij})],_j = 0 \\ & (b_l c_m),_t \frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \zeta_l \eta_m + \frac{1}{2} (b_l a_k a_m),_t \zeta_l \xi_{kh} \xi_{mh} \\ & \quad + \left[\left(\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} b_l \zeta_l c_m \eta_m + \frac{1}{2} b_l \zeta_l a_k \xi_{kh} a_m \xi_{mh} + \frac{1}{\gamma M^2} b_l \zeta_l c_m \eta_m \right) a_n \xi_{nj} \right],_j \\ & \quad - \frac{\kappa}{Pr Re (\gamma-1) M^2} c_n \eta_{n,jj} - \frac{\mu}{Re} [(a_k \xi_{ki,j} + a_k \xi_{kj,i} - \frac{2}{3} a_l \xi_{lh,h} \delta_{ij}) a_n \xi_{ni}],_j = 0 \\ & (a_k \xi_{ki}, b_l \zeta_l, c_m \eta_m) = (u_{0i}, \rho_0, T_0) \\ & (b_k \zeta_k, b_k \zeta_{k,j} n_j)_{\partial\Omega} = (\rho_B, \rho_{B,j} n_j) \\ & (a_k \xi_{ki}, a_k \xi_{ki,j} n_j)_{\partial\Omega} = (u_{Bi}, u_{Bi,j} n_j) \\ & (c_k \eta_k, c_k \eta_{k,j} n_j)_{\partial\Omega} = (T_B, T_{B,j} n_j) \end{aligned} \right.$$

将可压缩流动无量纲标量控制方程组中的连续性方程、动量方程和能量方程分别在密度时空耦合内禀基 ζ_r 、速度时空耦合内禀基 ξ_{ri} 和温度时空耦合内禀基 η_r 上 Galerkin 投影, 在投影时引入密度场、速度场和温度场的边界条件,

$$\mathcal{U}_i = \begin{cases} a_k \xi_{ki}, & \text{in } \Omega \setminus \partial\Omega \\ (a_k \xi_{ki})^{bd}, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\mathcal{D} = \begin{cases} b_k \zeta_k, & \text{in } \Omega \setminus \partial\Omega \\ (b_k \zeta_k)^{bd}, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\mathcal{F} = \begin{cases} c_k \eta_k, & \text{in } \Omega \setminus \partial\Omega \\ (c_k \eta_k)^{bd}, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

其中, $(a_k \xi_{ki})^{bd}$ 、 $(b_k \zeta_k)^{bd}$ 和 $(c_k \eta_k)^{bd}$ 的具体形式由边界条件决定, 由此得到可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统方程组:

$$\begin{cases} b_{r,t} = \mathcal{A}_r^I \\ a_{k,t} \mathcal{B}_{kr}^I + b_{l,t} \mathcal{B}_{lr}^{II} = \mathcal{B}_r^{III} \\ c_{m,t} \mathcal{C}_{mr}^I + b_{l,t} \mathcal{C}_{lr}^{II} + a_{k,t} \mathcal{C}_{kr}^{III} = \mathcal{C}_r^{IV} \end{cases}$$

其中, 各系数如下,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_r^I = - \left(\int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{U}_{j,j} \zeta_r \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D}_{,j} \mathcal{U}_j \zeta_r \, d\Omega \right) \\ \mathcal{B}_{kr}^I = \int_{\Omega} \mathcal{D} \xi_{ki} \xi_{ri} \, d\Omega \\ \mathcal{B}_{lr}^{II} = \int_{\Omega} \zeta_l \mathcal{U}_i \xi_{ri} \, d\Omega \\ \mathcal{B}_r^{III} = - \left[\int_{\Omega} \mathcal{D}_{,j} \mathcal{U}_i \mathcal{U}_j \xi_{ri} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{U}_{i,j} \mathcal{U}_j \xi_{ri} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{j,j} \xi_{ri} \, d\Omega \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\gamma M^2} \left(\int_{\Omega} \mathcal{D}_{,j} \mathcal{T} \xi_{rj} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{T}_{,j} \xi_{rj} \, d\Omega \right) - \frac{\mu}{Re} \int_{\Omega} \left(\mathcal{U}_{i,jj} + \mathcal{U}_{j,ij} - \frac{2}{3} \mathcal{U}_{h,hi} \right) \xi_{ri} \, d\Omega \right] \\ \mathcal{C}_{mr}^I = \frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \int_{\Omega} \mathcal{D} \eta_m \eta_r \, d\Omega \\ \mathcal{C}_{lr}^{II} = \frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \int_{\Omega} \zeta_l \mathcal{T} \eta_r \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta_l \mathcal{U}_h \mathcal{U}_h \eta_r \, d\Omega \\ \mathcal{C}_{kr}^{III} = \int_{\Omega} \mathcal{D} \xi_{kh} \mathcal{U}_h \eta_r \, d\Omega \\ \mathcal{C}_r^{IV} = - \left\{ \frac{1}{(\gamma-1)M^2} \left(\int_{\Omega} \mathcal{D}_{,j} \mathcal{T} \mathcal{U}_j \eta_r \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{T}_{,j} \mathcal{U}_j \eta_r \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{T} \mathcal{U}_{j,j} \eta_r \, d\Omega \right) + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{U}_{h,j} \mathcal{U}_h \mathcal{U}_j \eta_r \, d\Omega \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} \mathcal{D}_{,j} \mathcal{U}_h \mathcal{U}_h \mathcal{U}_j \eta_r \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{D} \mathcal{U}_h \mathcal{U}_h \mathcal{U}_{j,j} \eta_r \, d\Omega \right) - \frac{\kappa}{Pr Re (\gamma-1) M^2} \int_{\Omega} \mathcal{T}_{,jj} \eta_r \, d\Omega \right. \\ \quad \left. - \frac{\mu}{Re} \left[\int_{\Omega} \left(\mathcal{U}_{i,j} \mathcal{U}_{i,j} + \mathcal{U}_{i,j} \mathcal{U}_{j,i} - \frac{2}{3} \mathcal{U}_{j,j} \mathcal{U}_{h,h} \right) \eta_r \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\mathcal{U}_i \mathcal{U}_{i,jj} + \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{j,ij} - \frac{2}{3} \mathcal{U}_i \mathcal{U}_{h,hi} \right) \eta_r \, d\Omega \right] \right\} \end{array} \right.$$

初始条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} b_k(0) = (\rho(0), \zeta_k) \\ a_k(0) = (u_i(0), \xi_{ki}) \\ c_k(0) = (T(0), \eta_k) \end{array} \right\}$$

采用速度、密度和温度的三个 POD 基分别作为 $\xi_{ki}^0, \zeta_k^0, \eta_k^0$ 的第一、二、三个初始基函数.

可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统建模方法求解:

应用初始条件和采用四阶龙格 - 库塔法和病态线性方程组 AFD 算法求解可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统方程组, 得到 a_k^i, b_k^i, c_k^i .

(2) 逼近初始条件的目标泛函 J

$$\left\{ \begin{aligned} J(\xi_{ki}) &= \int_{\Omega} (u_{Ri}(0), u_{Ri}(0)) \, d\Omega + \int_{\Omega} (\rho_R(0), \rho_R(0)) \, d\Omega + \int_{\Omega} (T_R(0), T_R(0)) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\bar{u}_i(0) - a_k(0)\xi_{ki}) (\bar{u}_i(0) - a_k(0)\xi_{ki}) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\bar{\rho}(0) - b_k(0)\zeta_k) (\bar{\rho}(0) - b_k(0)\zeta_k) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} (\bar{T}(0) - c_k(0)\eta_k) (\bar{T}(0) - c_k(0)\eta_k) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [\bar{u}_i(0)\bar{u}_i(0) - 2a_k(0)\xi_{ki}\bar{u}_i(0) + a_k(0)\xi_{ki}a_k(0)\xi_{ki}] \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} [\bar{\rho}(0)\bar{\rho}(0) - 2b_k(0)\zeta_k\bar{\rho}(0) + b_k(0)\zeta_k b_k(0)\zeta_k] \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\Omega} [\bar{T}(0)\bar{T}(0) - 2c_k(0)\eta_k\bar{T}(0) + c_k(0)\eta_k c_k(0)\eta_k] \, d\Omega \end{aligned} \right.$$

其中, $-$ 是精确解.

(3) 采用共轭梯度法求得时空耦合内禀基

对上述目标泛函求变分, 并令变分为零, 可得如下梯度方程:

$$\left\{ \begin{aligned} a_k(0)\xi_{ki} - \bar{u}_i(0) &= 0 \\ b_k(0)\zeta_k - \bar{\rho}(0) &= 0 \\ c_k(0)\eta_k - \bar{T}(0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

采用共轭梯度优化算法求得系数表达式中的时空耦合内禀基.

采用 Grand-Schmidt 正交化方法对速度时空耦合内禀基 ξ_{ki} 、密度时空耦合内禀基 ζ_k 和温度时空耦合内禀基 η_k 进行正交化和归一化.

可压缩时空耦合低维动力系统建模方法的求解步骤

1. 初始化:

a. 采用 CFD 方法计算 500 个 CFD 时间步长的流场, 每隔 10 个 CFD 时间步长 Δt 取一个流场, 得到 50 个时刻的流场, 并基于这些流场采用 Snapshot POD 方法得到 50 个 POD 基, 取前 N 个 POD 基作为初始迭代基;

b. 采用逼近初始条件的最优控制方法得到 $\xi_{ki}^*(t, x_i)$ 、 $\zeta_k^*(t, x_i)$ 和 $\eta_k^*(t, x_i)$, 并用 Grand-Schmidt 方法对 $\xi_{ki}^*(t, x_i)$ 、 $\zeta_k^*(t, x_i)$ 和 $\eta_k^*(t, x_i)$ 进行正交化和归一化. 令 $t = 0$;

2. $t = t + M\Delta t$, 其中 M 是正整数;

3. 采用 CFD 方法求得 t 时刻的动力系统初始场;

4. 采用逼近初始条件的最优控制方法得到 $\xi_{ki}^*(t, x_i)$ 、 $\zeta_k^*(t, x_i)$ 和 $\eta_k^*(t, x_i)$, 并用 Grand-Schmidt 方法对 $\xi_{ki}^*(t, x_i)$ 、 $\zeta_k^*(t, x_i)$ 和 $\eta_k^*(t, x_i)$ 进行正交化和归一化;

5. 采用四阶龙格 - 库塔法求解可压缩 Navier-Stokes 时空耦合低维动力系统方程组得到 $a_k(t)$ 、 $b_k(t)$ 和 $c_k(t)$. 在龙格 - 库塔法求解过程四个分步中都要满足边界条件, 且采用病态方程组 AFD 方法对耦合方程组进行预处理;

6. 求可压缩流场物理量值: $u_i(t, x_i) = a_k(t)\xi_{ki}^*(t, x_i)$, $\rho(t, x_i) = b_k(t)\zeta_k^*(t, x_i)$, $T(t, x_i) = c_k(t)\eta_k^*(t, x_i)$

7. 返回第 2 步直至计算完毕.

四. 可压缩时空耦合低维动力系统建模算例

全场余量相对误差和全场各阶流场变量占比定义

(1) 全场余量相对误差 (如 δ_r^u):

在进行各种低维动力系统模型和时空耦合低维动力系统模型与计算流体力学结果定量比对时, 我们采用如下定义的全场余量相对误差, 以速度 \mathbf{u} 为例

$$\delta_r^u = \frac{\int_{\Omega} [(\bar{u} - u)^2 + (\bar{v} - v)^2 + (\bar{w} - w)^2] d\Omega}{\int_{\Omega} [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2] d\Omega} \times 100\%$$

其中, \bar{u} 、 \bar{v} 、 \bar{w} 为计算流体力学结果.

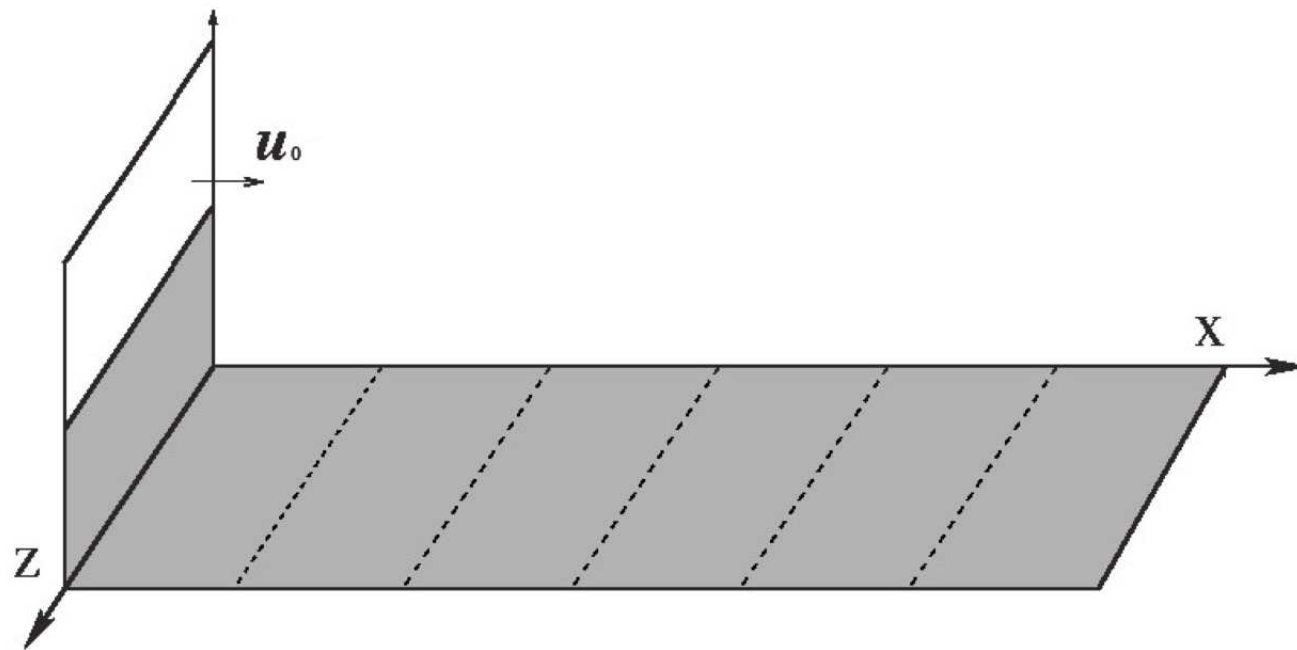
(2) 全场各阶流场变量占比 (如 p_k^u):

采用如下定义的全场各阶 (k) 流场变量占比, 以速度 \mathbf{u} 占比 p_k^u 为例

$$p_k^u = \frac{\int_{\Omega} (|u_k| + |v_k| + |w_k|) d\Omega}{\int_{\Omega} (|u| + |v| + |w|) d\Omega} \times 100\%$$

其中, $|u|$ 、 $|v|$ 、 $|w|$ 为采用时空耦合低维动力系统建模方法得到的速度场各分量的绝对值.

三维可压缩后台阶流

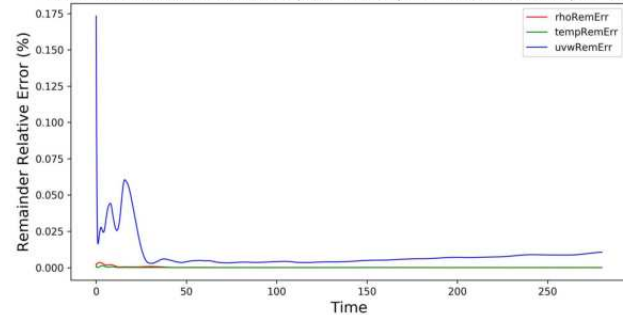


三维可压缩后台阶流示意图

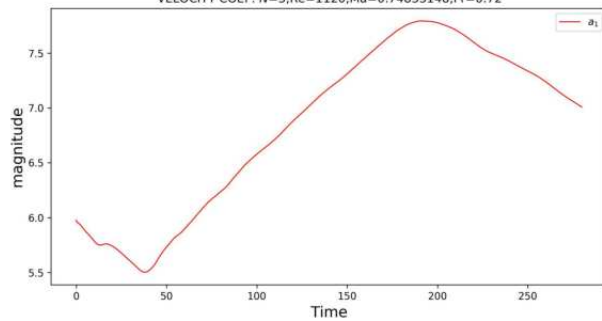
$Re=1120$, $Ma=0.748$, $Pr=0.7$, 左入流、右出流、四周无滑移. 采用 3 个时空耦合内禀基.

(1) 误差曲线与系数演化曲线:

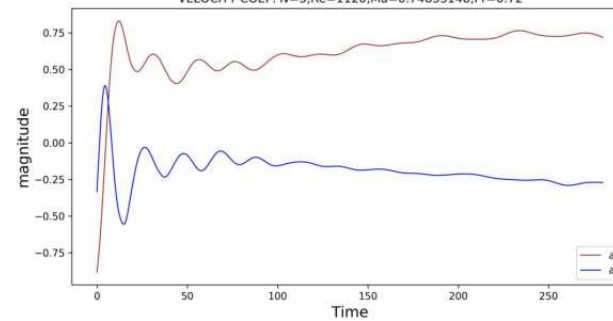
OSM Remainder Err: $N=3, Re=1120, Ma=0.74833148, Pr=0.72$

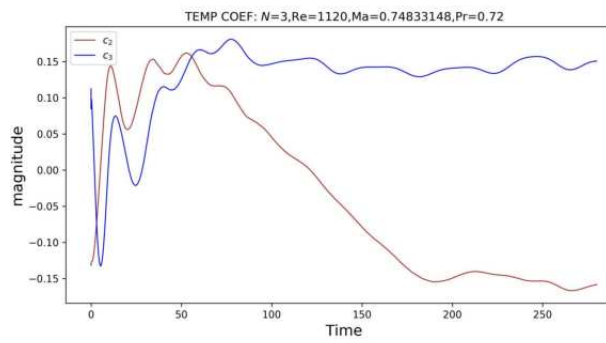
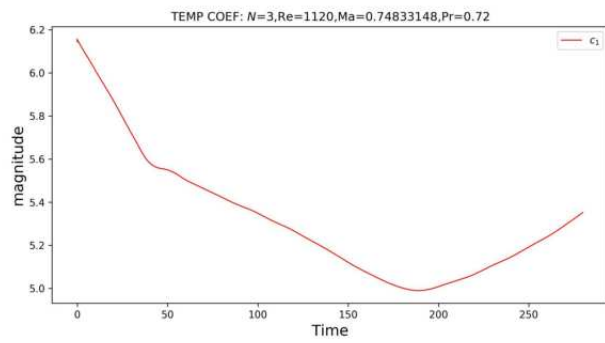
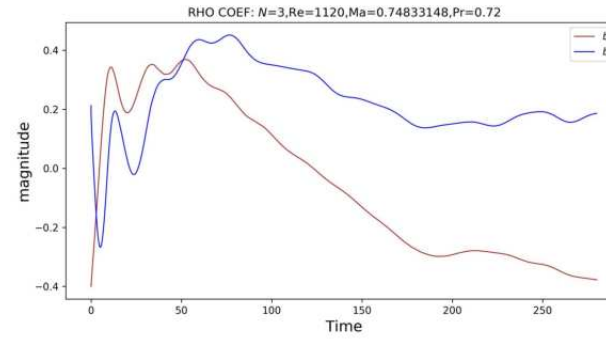
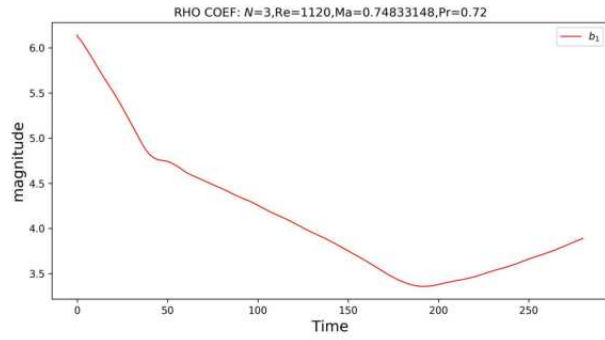


VELOCITY COEF: $N=3, Re=1120, Ma=0.74833148, Pr=0.72$



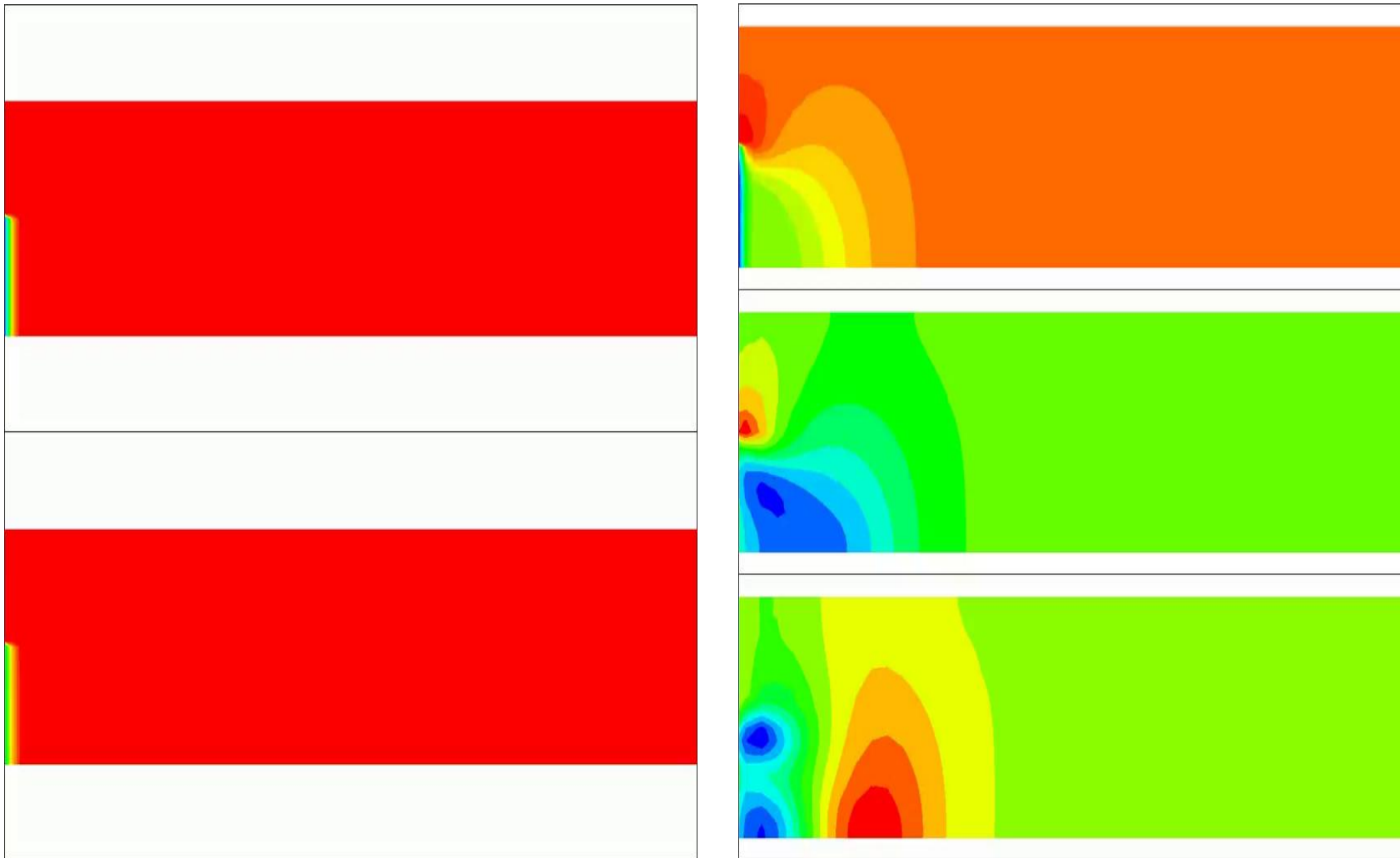
VELOCITY COEF: $N=3, Re=1120, Ma=0.74833148, Pr=0.72$



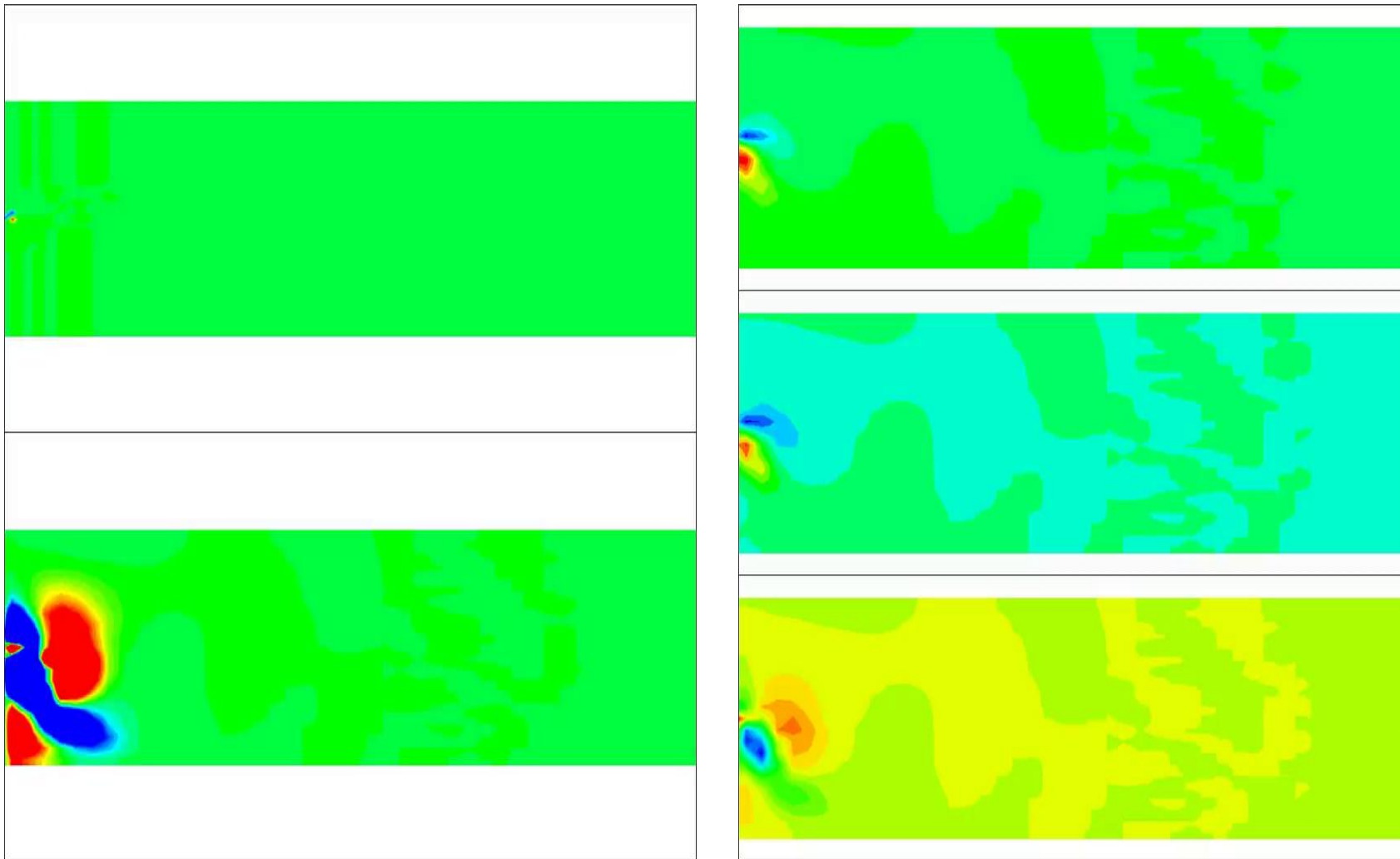


(2) 流场定量比对与时空内禀基:

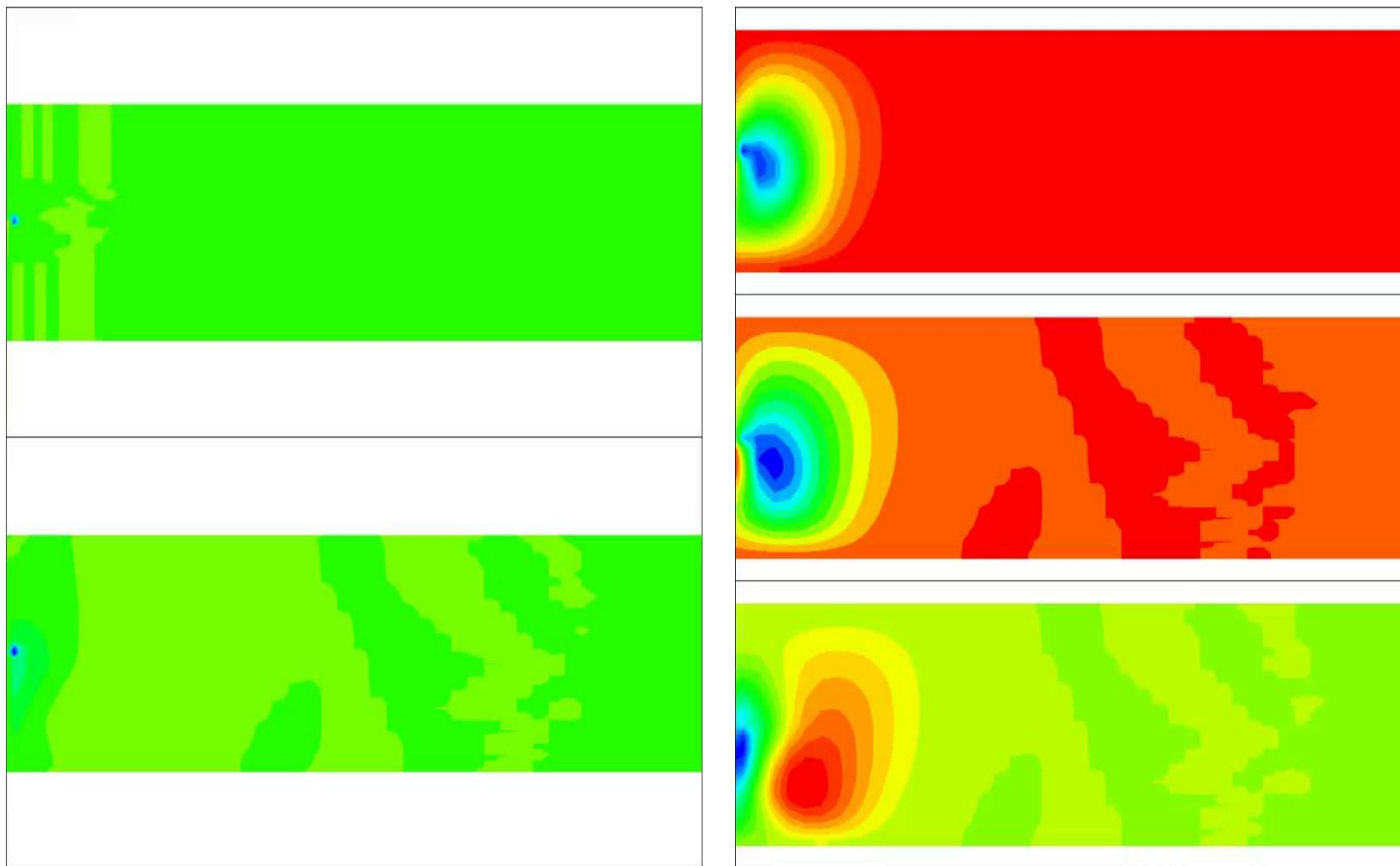
速度场 (u) 及其时空内禀基:



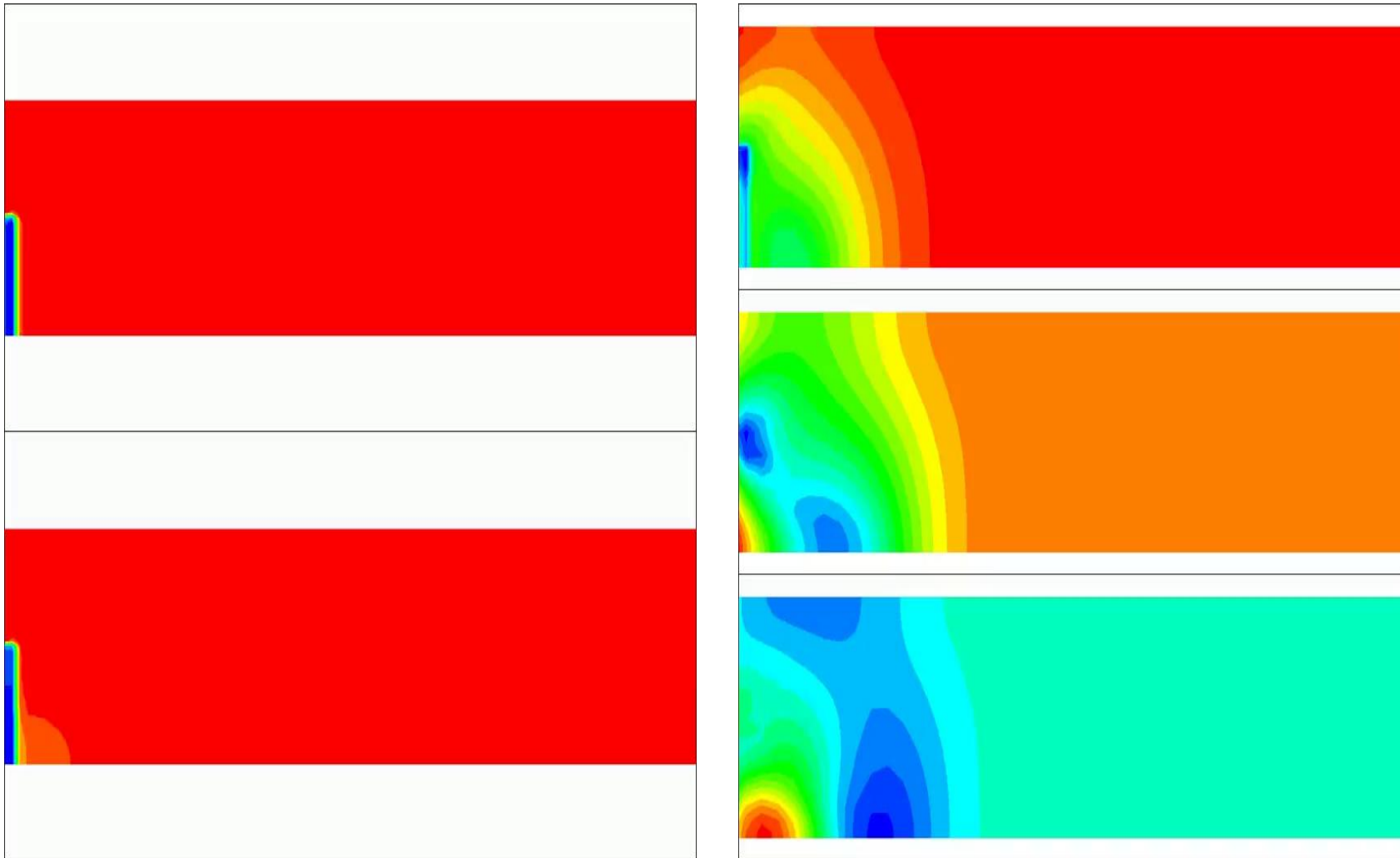
速度场 (v) 及其时空内禀基:



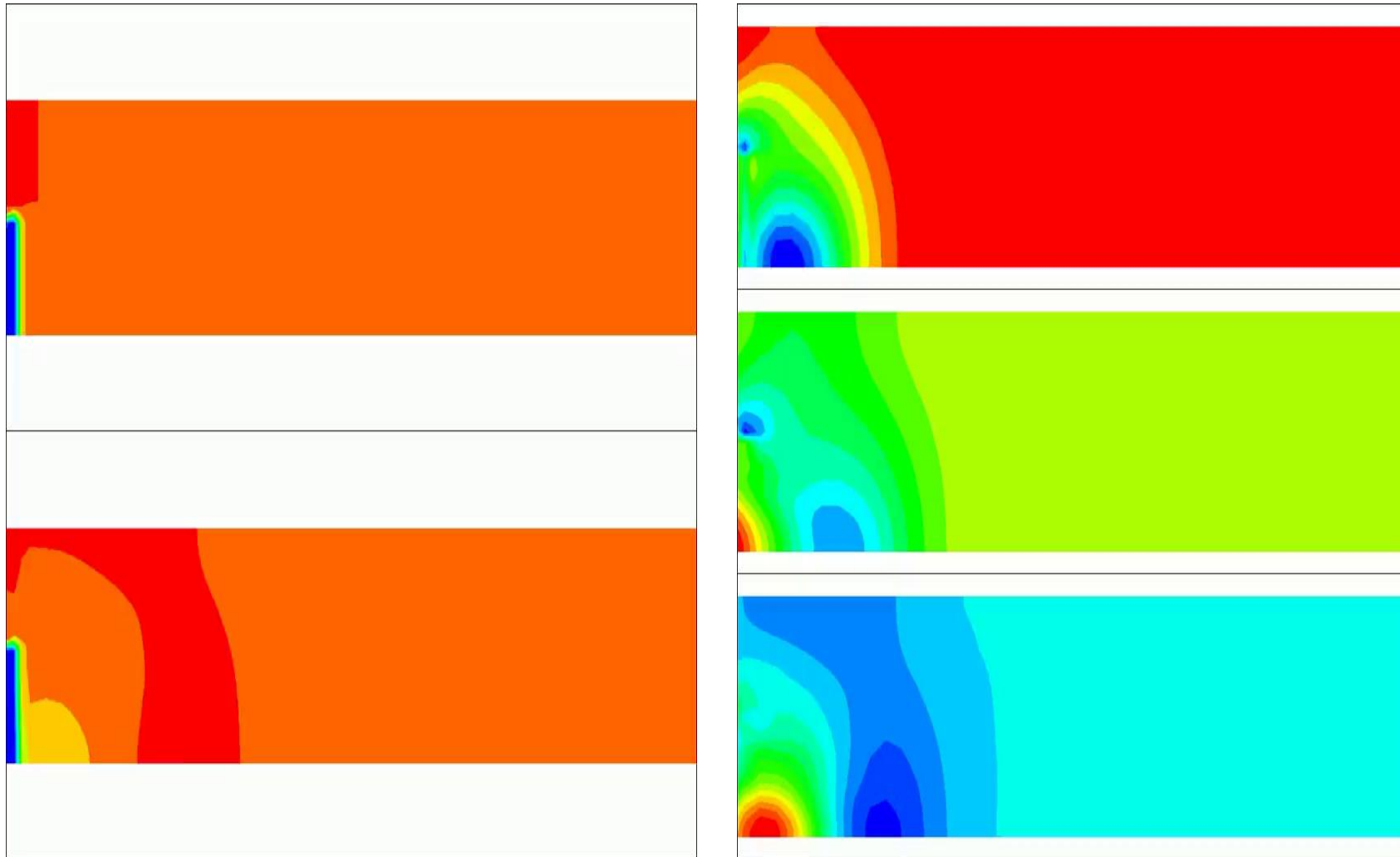
速度场 (w) 及其时空内禀基:



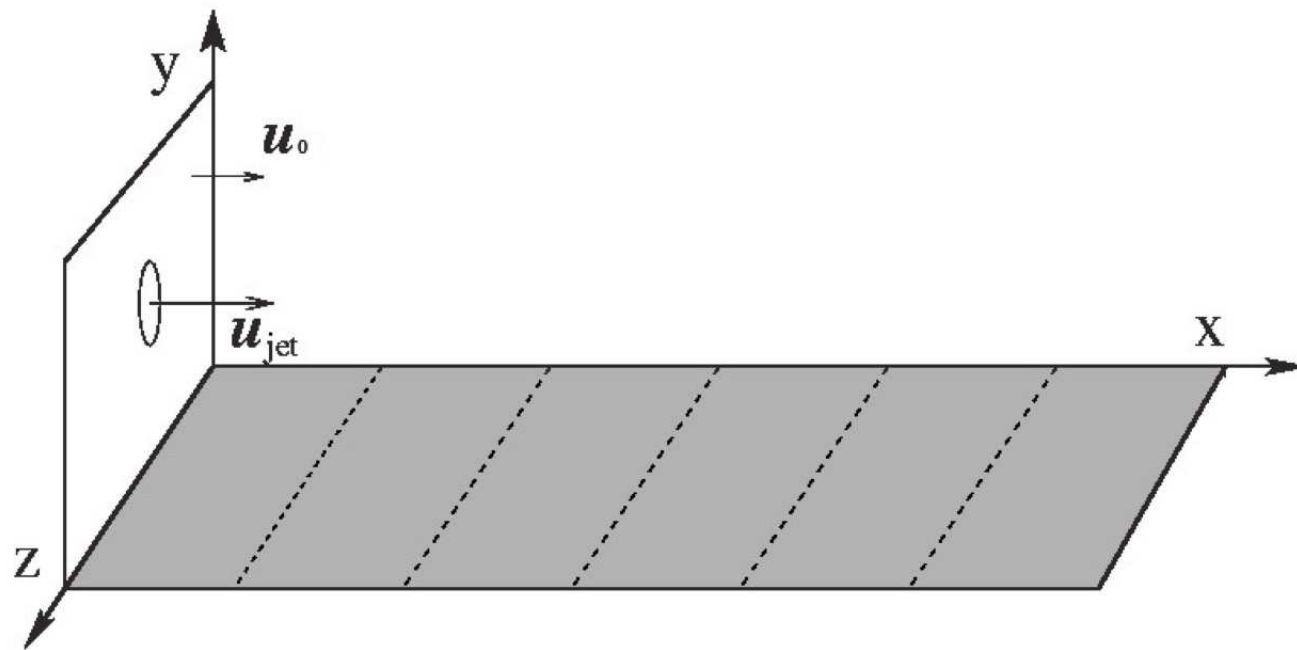
密度场 (ρ) 及其时空内禀基:



温度场 (T) 及其时空内禀基:



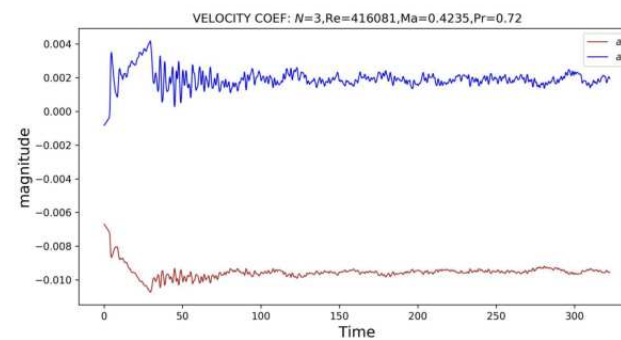
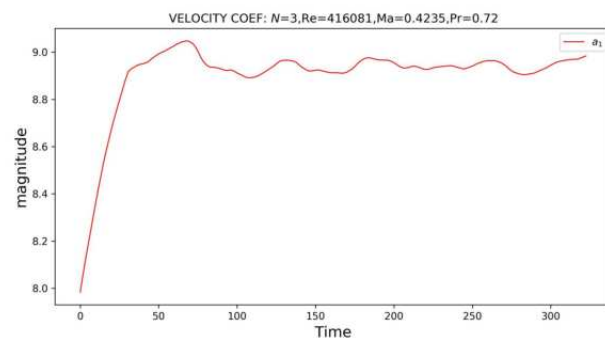
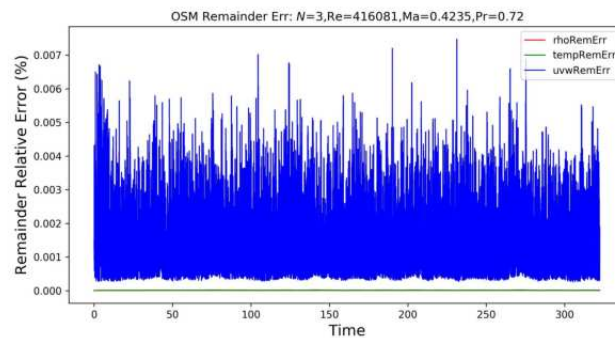
三维可压缩湍流直射流

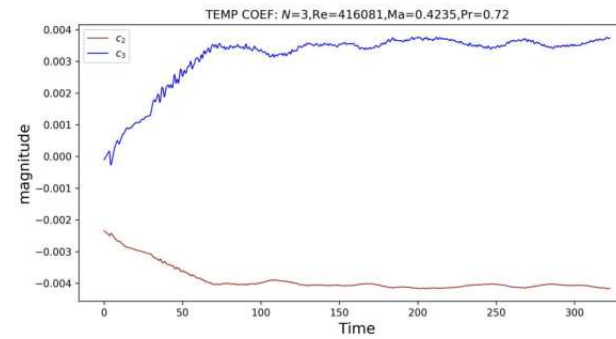
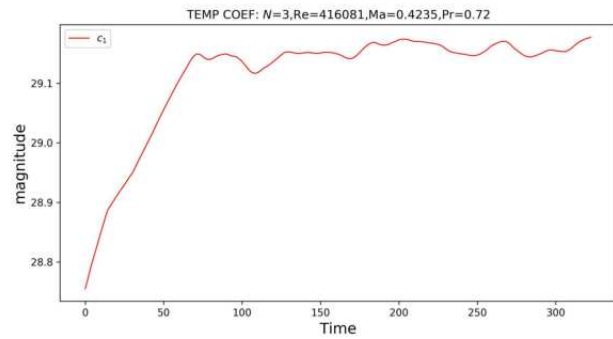
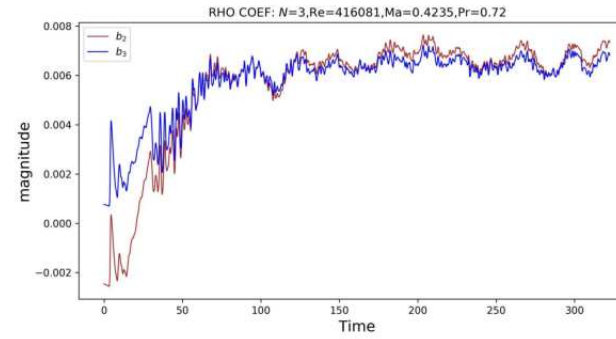
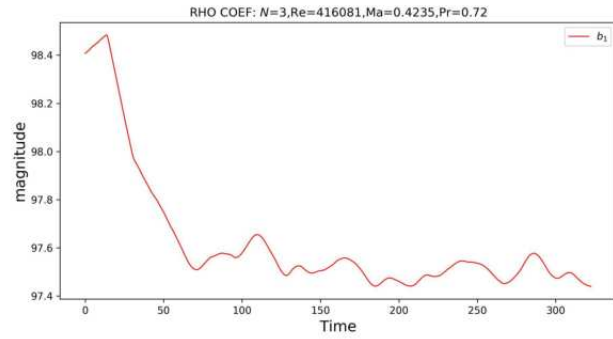


三维可压缩湍流直射流示意图

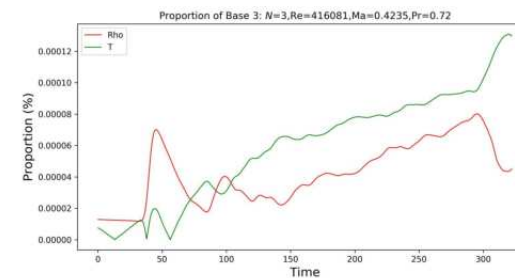
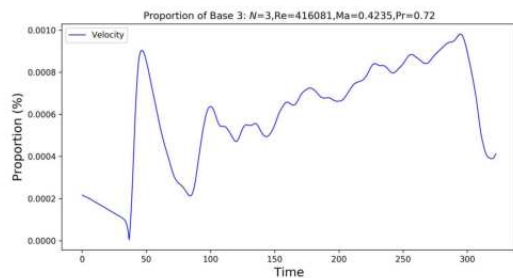
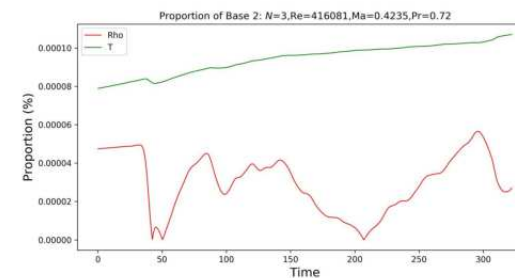
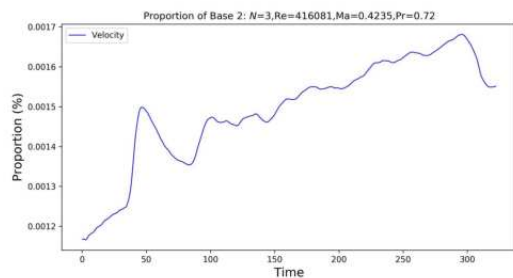
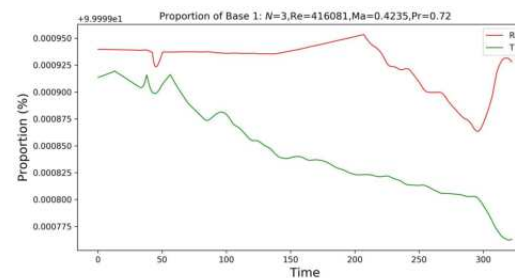
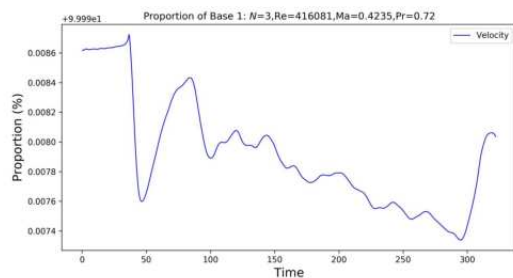
$Re=416081$, $Ma=0.4235$, $Pr=0.72$, 左入流、右出流、四周滑移. 采用 3 个时空耦合内禀基.

(1) 误差曲线与系数演化曲线:



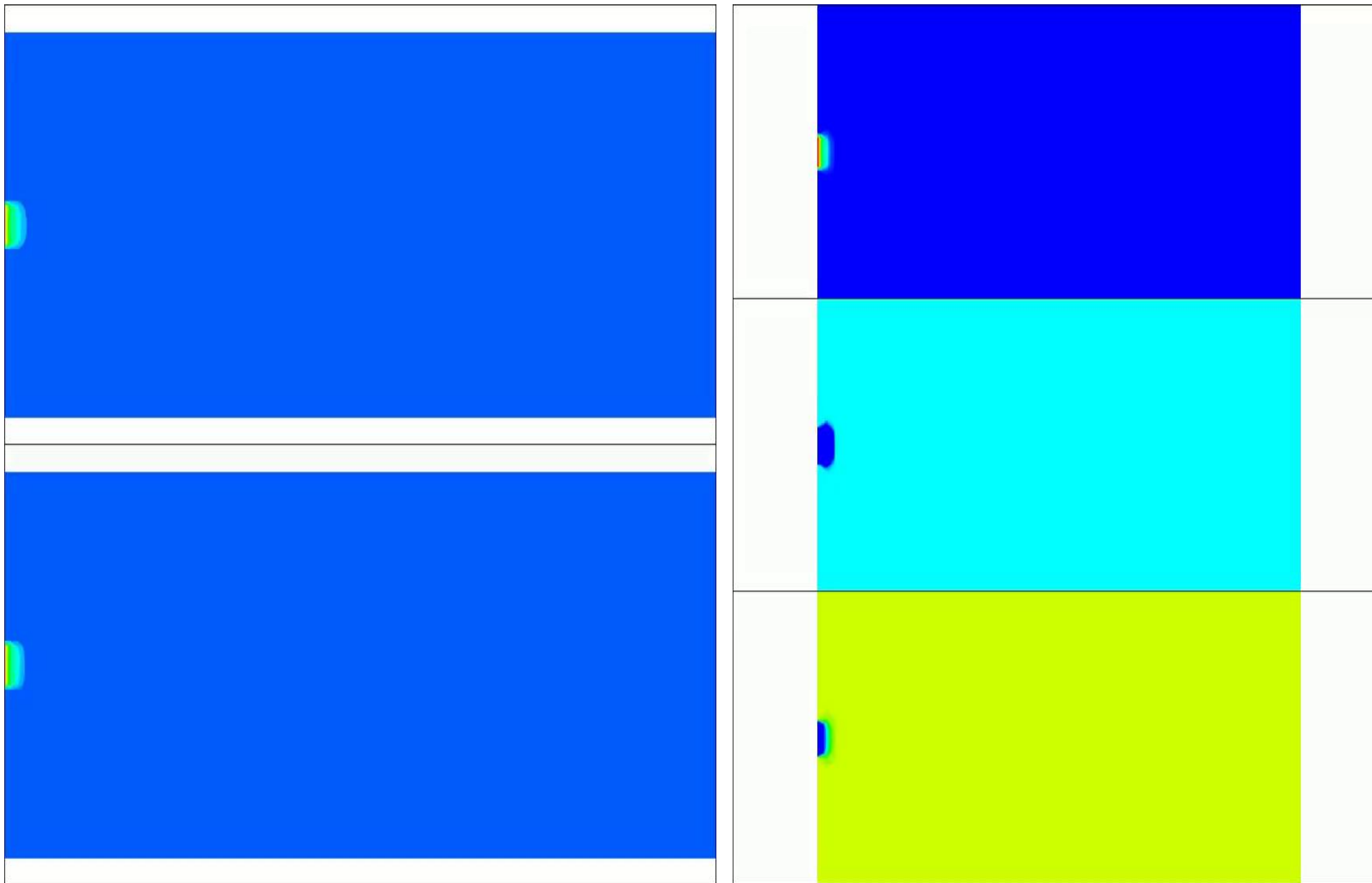


(2) 各阶近似流场变量占比随时间的演化曲线:

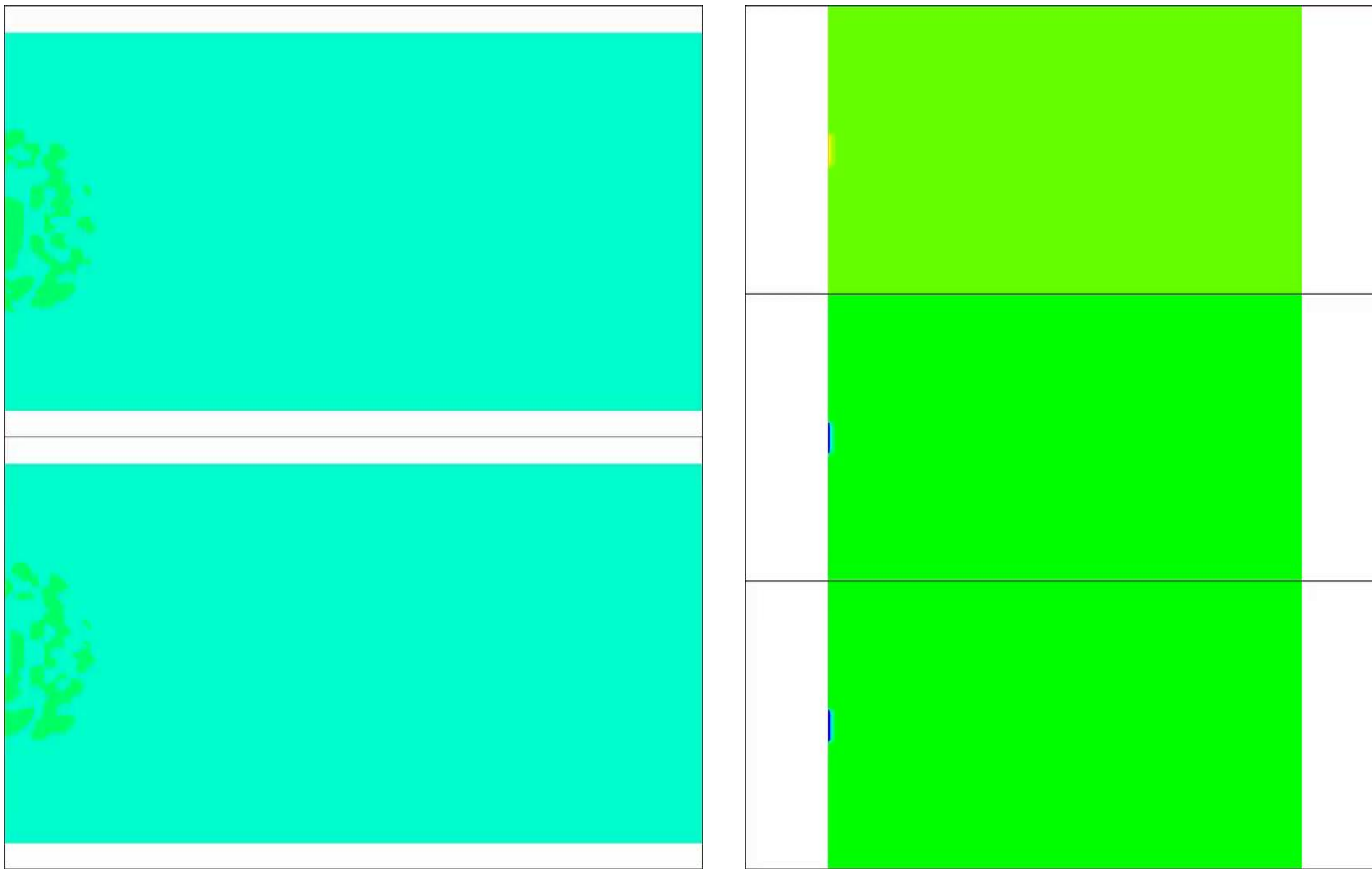


(3) 流场定量比对与时空内禀基:

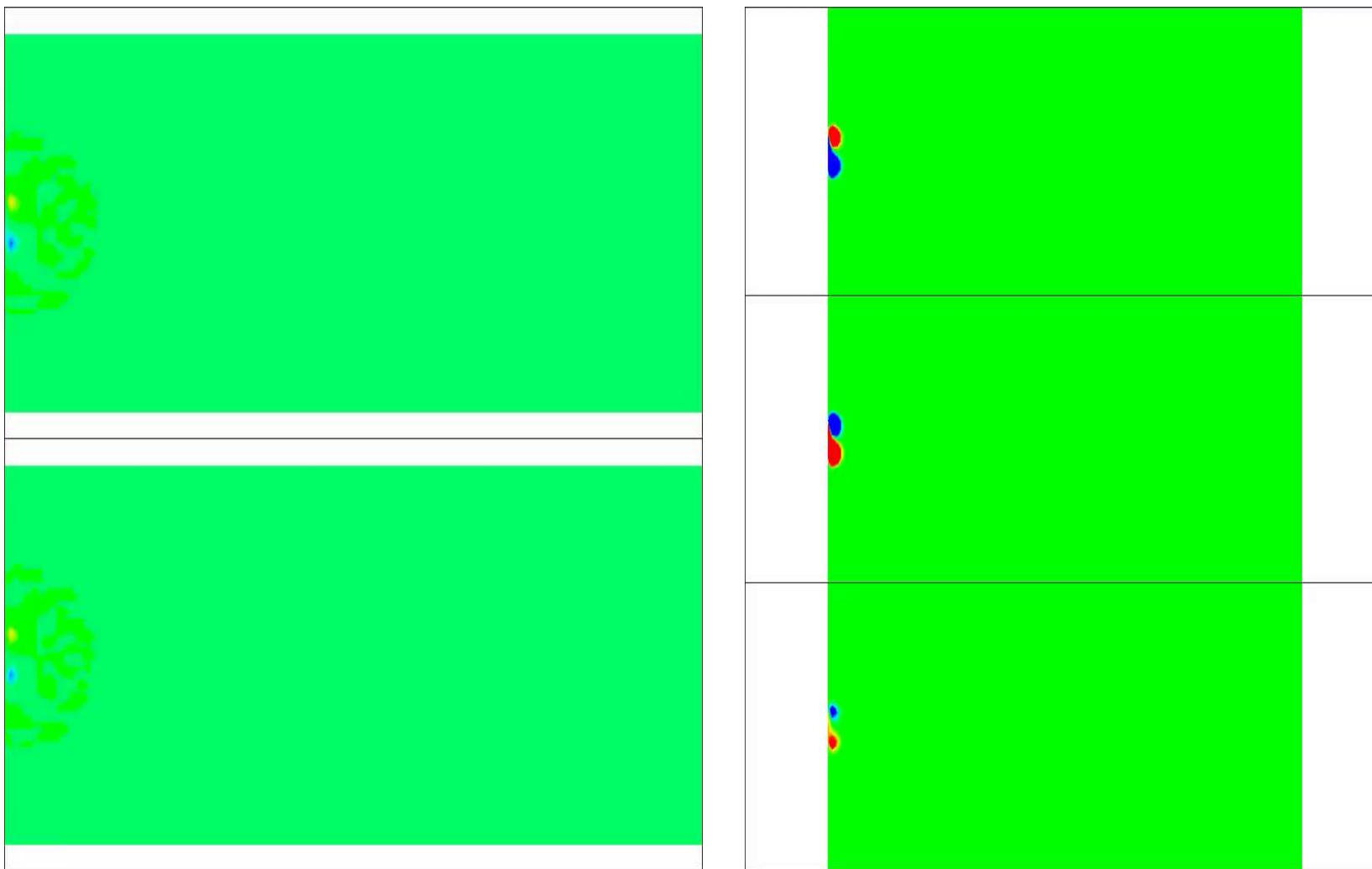
速度场 (u) 及其时空内禀基:



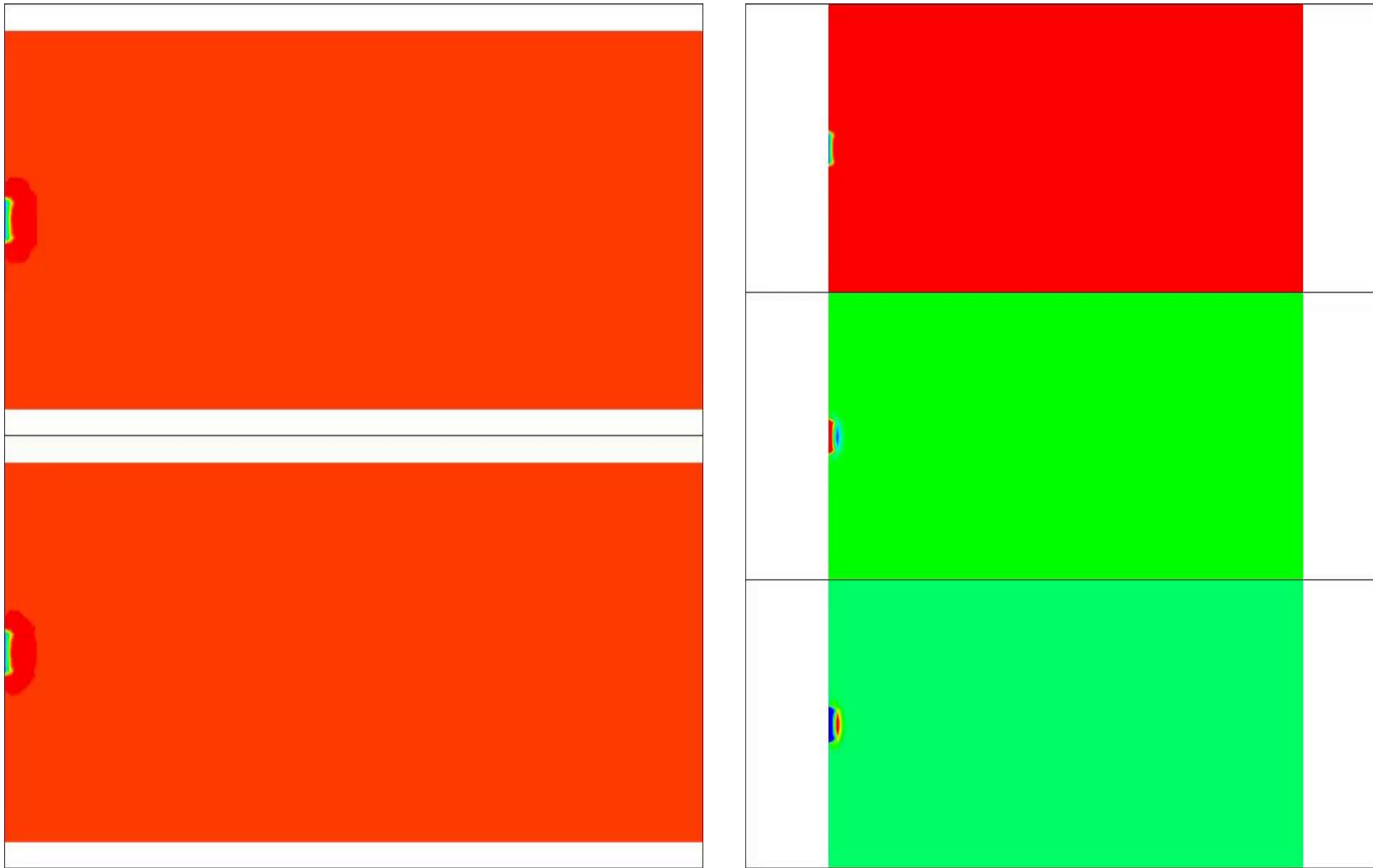
速度场 (v) 及其时空内禀基:



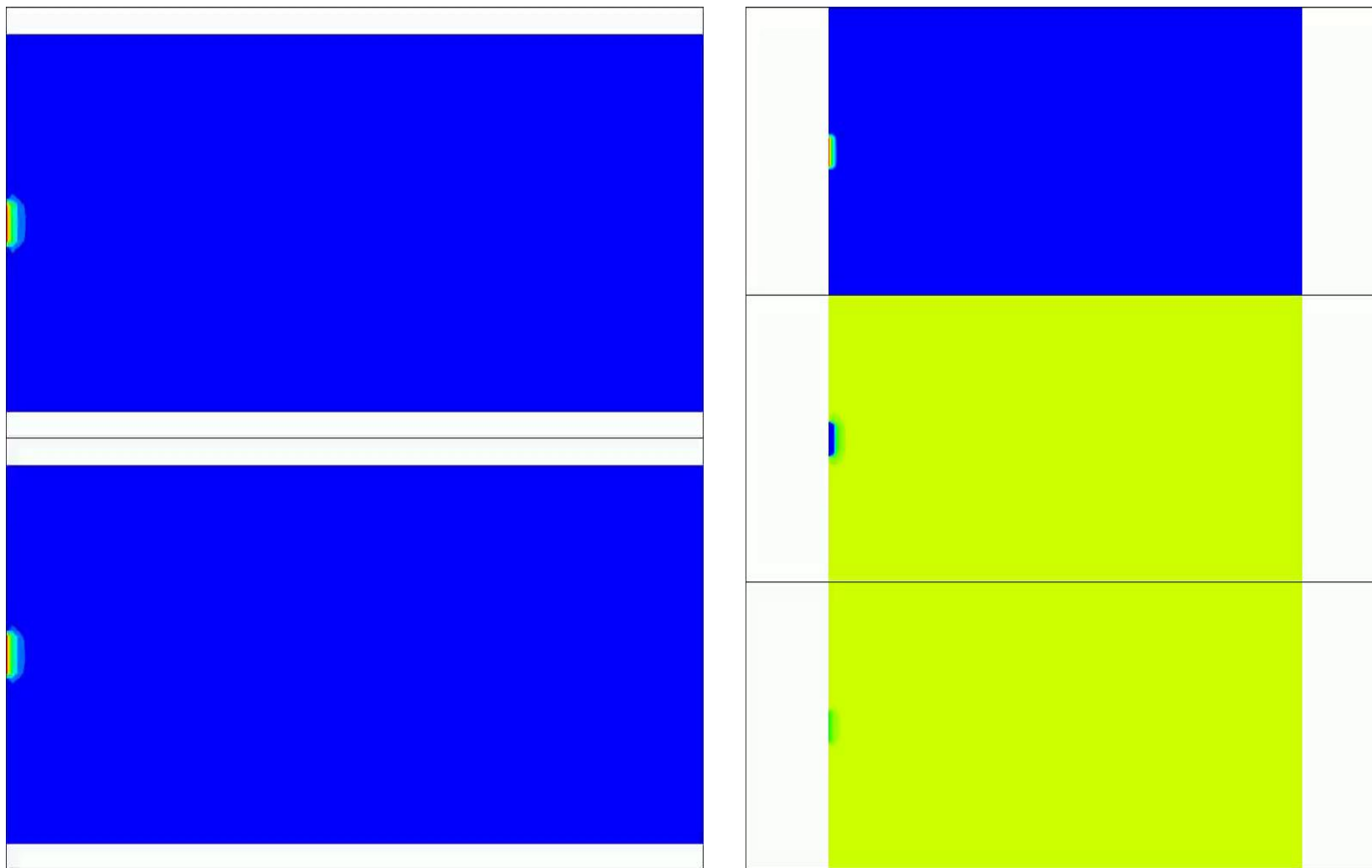
速度场 (w) 及其时空内禀基:



密度场 (ρ) 及其时空内禀基:



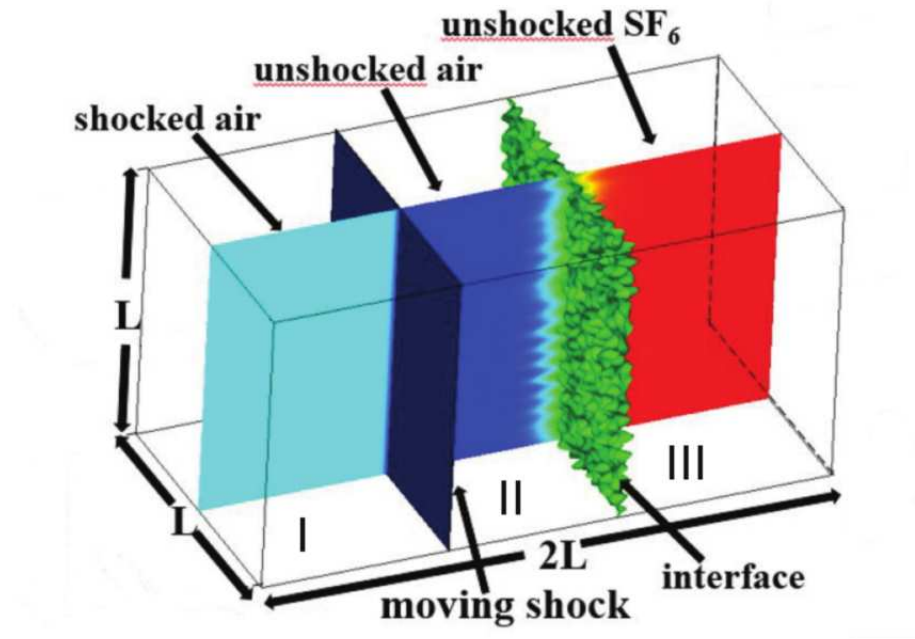
温度场 (T) 及其时空内禀基:



三维 Richtmyer-Meshkov 不稳定性中的湍流

(1) 有限长方体空腔中偏置 RMI 问题描述

研究在长方体空腔中具有多模态初始扰动的轻/重流体界面在平面激波冲击加速作用下的 RMI 中的湍流, 如下图所示.



长方体空腔中 RMI 初始条件示意图

在激波管

$$D = \{\mathbf{x} | 0 \leq y, z \leq L, 0 \leq x \leq 2L\}$$

中进行, 激波管展向尺寸为 $L = 0.01\text{m}$. 网格数为流向网格 \times 展向网格 \times 法向网格 $= 256 \times 128 \times 128$, $\Delta t = 2.5 \times 10^{-8}\text{s}$. 初始位于 $x = L/5$ 的激波沿 x 方向运动, 激波 Mach 数设为 $M_S = 1.5$. 初始界面位于 $x = L/2$ 处, 初始界面函数为

$$\varphi(\mathbf{x}) = x - L - \eta(y, z) = 0$$

并采用 Tritschler 等给出的多模态扰动形式

$$\eta(y, z) = a_0 \sum_{n=1}^{13} \sum_{m=3}^{15} a_{n,m} \sin(k_n y + \phi_n) \sin(k_m z + \chi_m)$$

其中主振幅为 $a_0 = 4 \times 10^{-5}\text{m}$, 不同模态的次级振幅为 $a_{n,m} = \sin(nm)/2$, 波数为 $k_n = 2\pi n/L$ 和 $k_m = 2\pi m/L$, 相位平移量为 $\phi_n = \tan(n)$ 和 $\chi_n = \tan(m)$.

界面两侧的轻/重流体为空气/SF6 组分, 其摩尔质量分别为 $M_1 = 28.964\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ 和 $M_2 = 146.057\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$, 初始压强和温度分别设为 $p_0 = 23000\text{Pa}$ 和 $T_0 = 298\text{K}$, 则密度根据状态方程式得到

$$\rho_i = \frac{p_0 M_i}{RT_0}$$

即,

$$\rho_1 = \frac{p_0 M_1}{RT_0} = \frac{23000\text{Pa} \times 28.964\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}}{8.314\text{Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}^{-1} \times 298\text{K}} = 0.269 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

$$\rho_2 = \frac{p_0 M_2}{RT_0} = \frac{23000\text{Pa} \times 146.057\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}}{8.314\text{Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}^{-1} \times 298\text{K}} = 1.356 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

Atwood 数为

$$A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{1.356 - 0.269}{0.269 + 1.356} = 0.669$$

初始条件:

综上所述, RMI 问题在初始时刻的激波管内流体被激波和界面分为三个区域: 波后轻流体 (I 区)、波前轻流体 (II 区) 和波前重流体 (III 区), 其中波后轻流体需要根据激波前后的 Rankine Hugoniot 条件确定, 比热比 $\gamma_1 = 1.4$. 具体表达式为密度

$$\rho_S = \frac{(\gamma_1 + 1)M_S^2}{2 + (\gamma_1 - 1)M_S^2} \rho_1 = \frac{(1.4 + 1)1.5^2}{2 + (1.4 - 1)1.5^2} 0.269 = 0.501 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

压强

$$p_S = \frac{2\gamma_1 M_S^2 - \gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1} p_0 = \frac{2 \times 1.4 \times 1.5^2 - 1.4 + 1}{1.4 + 1} 23000 = 56541.667(\text{Pa})$$

和速度

$$U_S = U_S \mathbf{i}, U_S = \frac{2(M_S^2 - 1)}{(\gamma_1 + 1)M_S} \sqrt{\frac{\gamma_1 p_0}{\rho_1}} = \frac{2(1.5^2 - 1)}{(1.4 + 1)1.5} \sqrt{\frac{1.4 \times 23000}{0.269}} = 240.26 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

温度同样由状态方程式确定为

$$T_S = \frac{p_S M_1}{\rho_S R} = \frac{56541.667 \times 28.964}{0.501 \times 8.314} = 393169.121(\text{K})$$

因此, RMI 问题的初始条件可总结为

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t = 0) &= (\rho_2 - \rho_1)\mathcal{H}(\varphi) - (\rho_S - \rho_1)\mathcal{H}\left(\frac{x - L}{L} + \frac{1}{2}\right) + \rho_S \\ &= (1.356 - 0.269)\mathcal{H}(x - 0.01 - \eta(y, z)) - (0.501 - 0.269)\mathcal{H}\left(\frac{x - 0.01}{0.01} + 0.5\right) + 0.501 \\ &= 0.5435 \left[\text{erf}\left(\frac{x - 0.01 - \eta(y, z)}{2\delta_0}\right) + 1 \right] - 0.116 \left[\text{erf}\left(\frac{100x - 0.5}{2\delta_0}\right) + 1 \right] + 0.501 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{x}, t = 0) &= \left[1 - \mathcal{H} \left(\frac{x - L}{L} + \frac{1}{2} \right) \right] U_S \mathbf{i} \\
&= \left[1 - \mathcal{H} \left(\frac{x - 0.01}{0.01} + 0.5 \right) \right] 240.26 \mathbf{i} \\
&= \left\{ 1 - 0.5 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{100x - 0.5}{2\delta_0} \right) + 1 \right] \right\} 240.26 \mathbf{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}, t = 0) &= -(p_S - p_0) \mathcal{H} \left(\frac{x - L}{L} + \frac{1}{2} \right) + p_S \\
&= -(56541.667 - 23000) \mathcal{H} \left(\frac{x - 0.01}{0.01} + 0.5 \right) + 56541.667 \\
&= -16770.8335 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{100x - 0.5}{2\delta_0} \right) + 1 \right] + 56541.667 (\text{Pa})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}, t = 0) &= -(T_S - T_0) \mathcal{H} \left(\frac{x - L}{L} + \frac{1}{2} \right) + T_S \\
&= -(393169.121 - 298) \mathcal{H} \left(\frac{x - 0.01}{0.01} + 0.5 \right) + 393169.121 \\
&= -196435.5605 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{100x - 0.5}{2\delta_0} \right) + 1 \right] + 393169.121 (\text{K})
\end{aligned}$$

其中 \mathcal{H} 为 Heaviside 函数

$$\mathcal{H} = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0. \end{cases}$$

采用误差函数做如下的光滑化操作

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\alpha}{2\delta_0} \right) + 1 \right]$$

其厚度可设为一个网格尺度 $\delta_0 = \Delta x$. 同时, 由于界面受激波加速后会产生 x 方向平移速度 $U_0^+ = 158.1 \text{ms}^{-1}$, 故为了使计算过程中的界面基本保持在初始位置, 应对初始时 x 方向速度减去 U_0^+ .

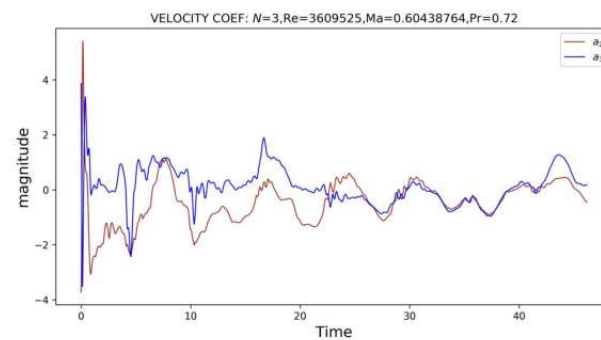
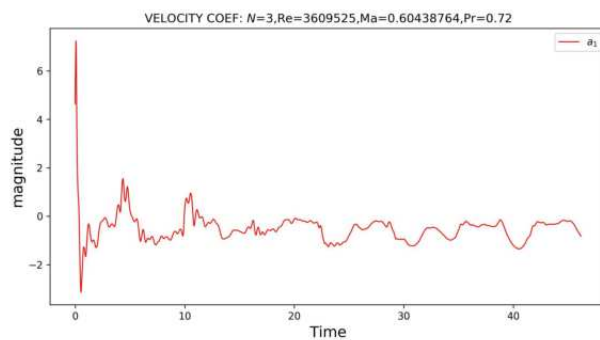
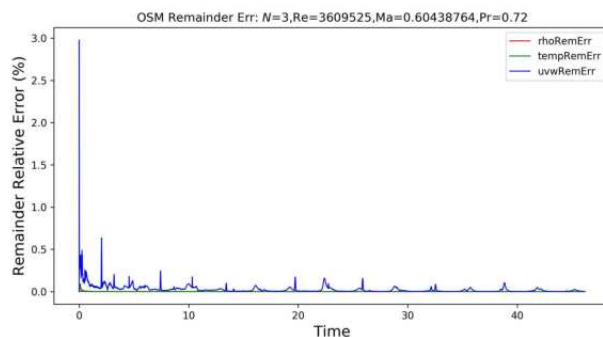
边界条件:

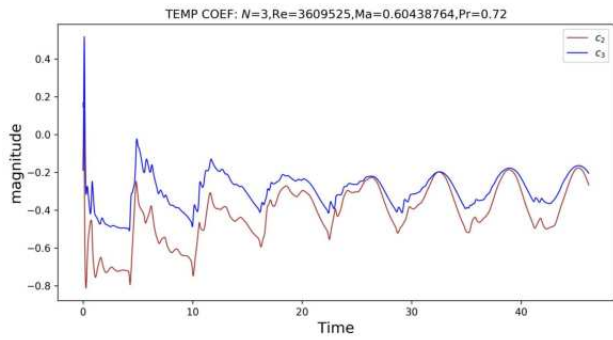
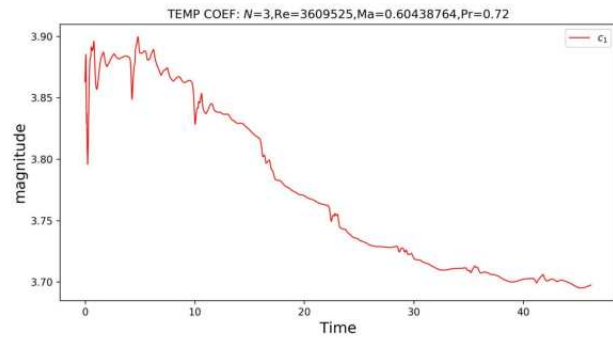
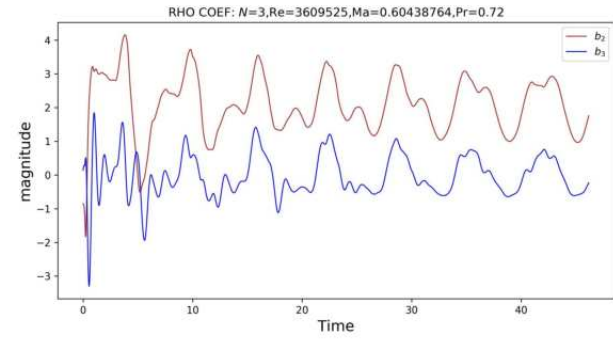
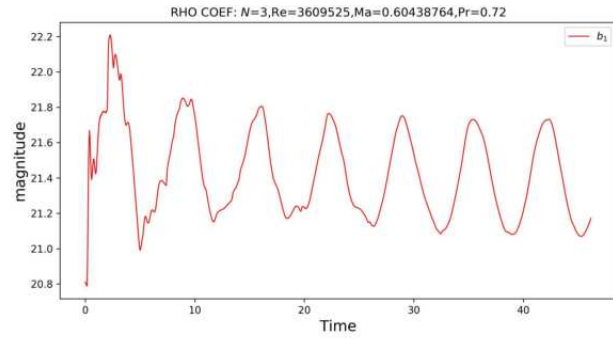
在 x 、 y 和 z 方向的速度边界条件均为无滑移固壁边界条件.

(2) 长方体空腔中偏置 RMI 湍流算例

$Re=3609525$, $Ma=0.60438764$, $Pr=0.72$, 左入流、右出流、四周无滑移. 采用 3 个时空耦合内禀基.

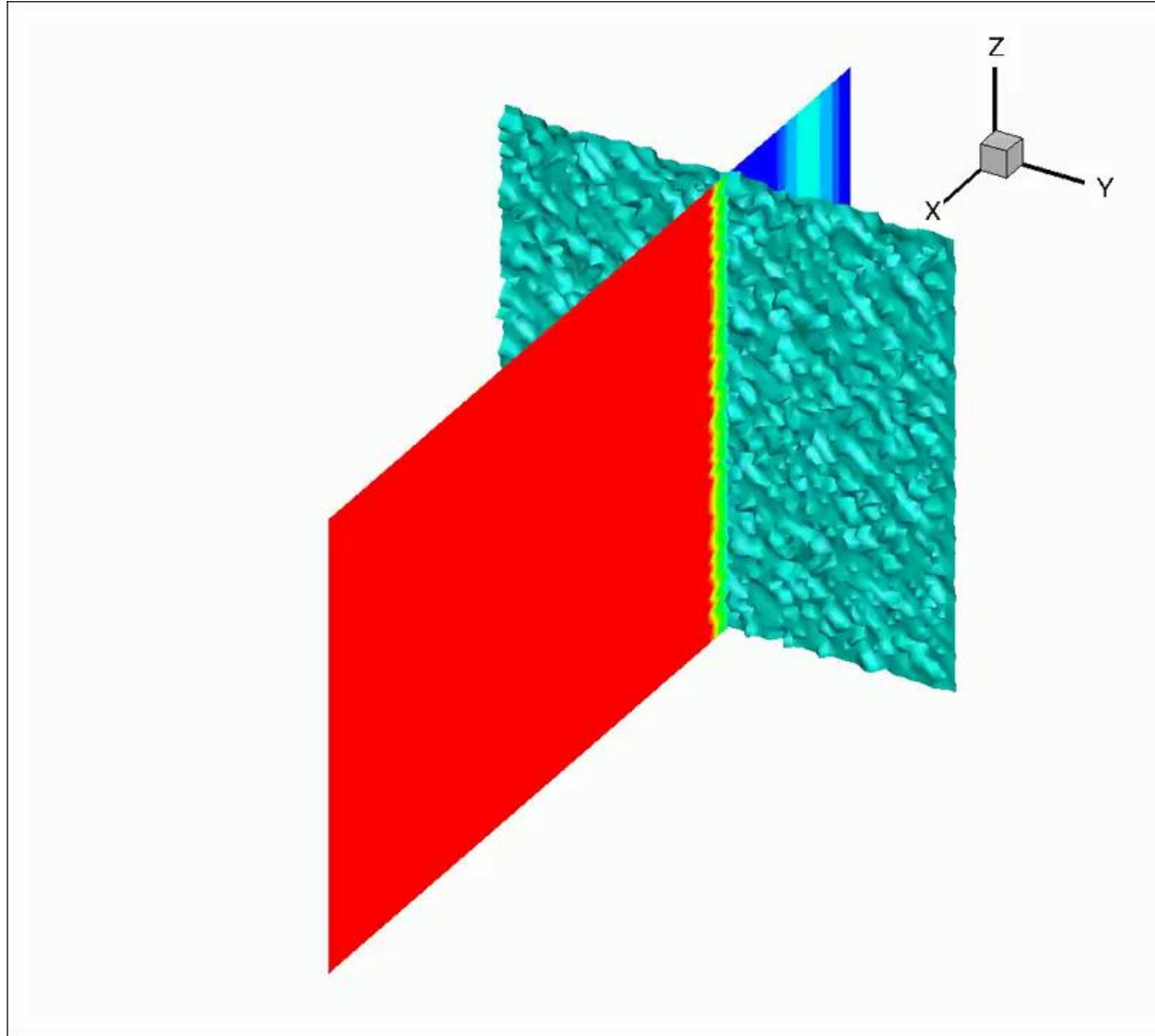
(a) 误差曲线与系数演化曲线:



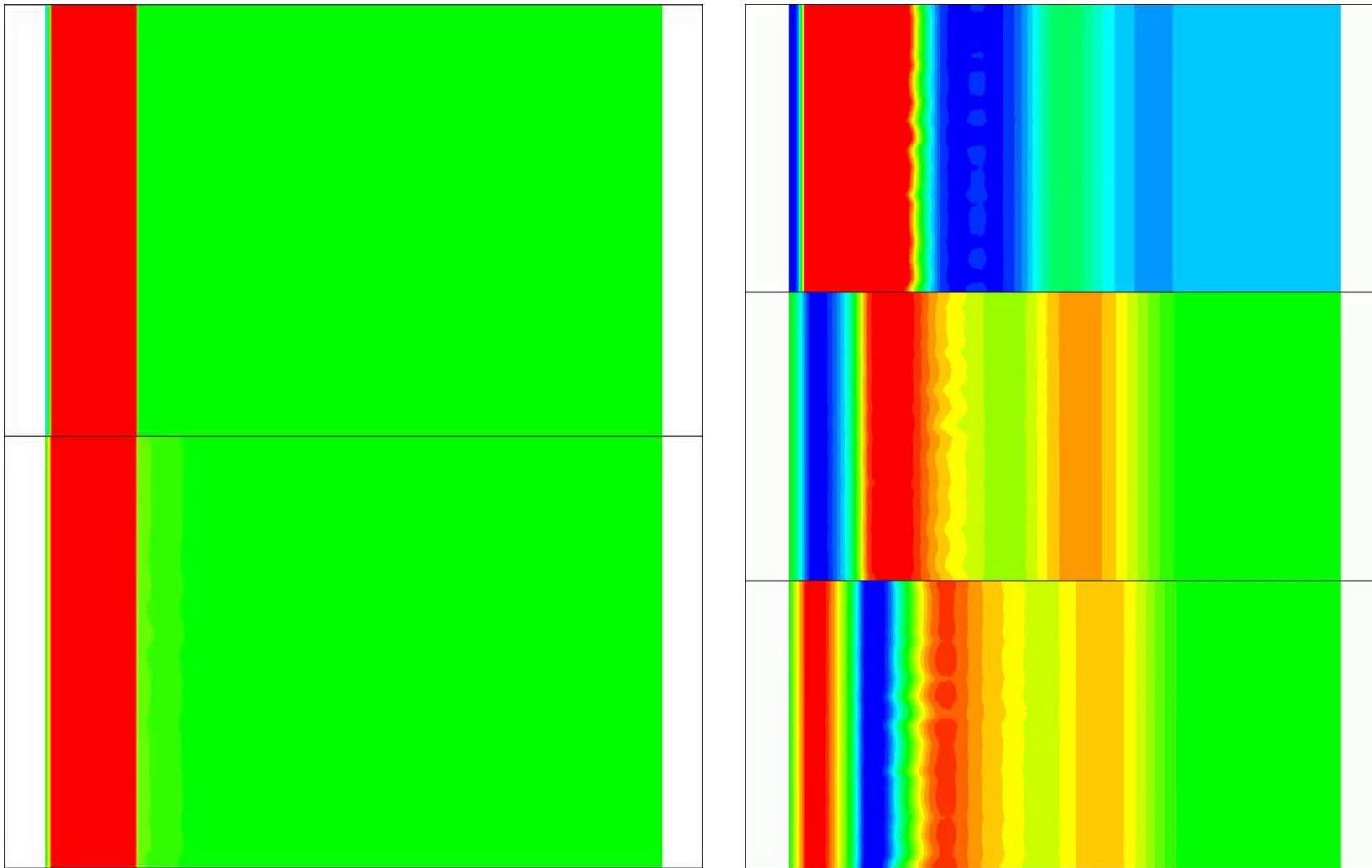


(b) 3D 密度面、流场定量对比与时空内禀基:

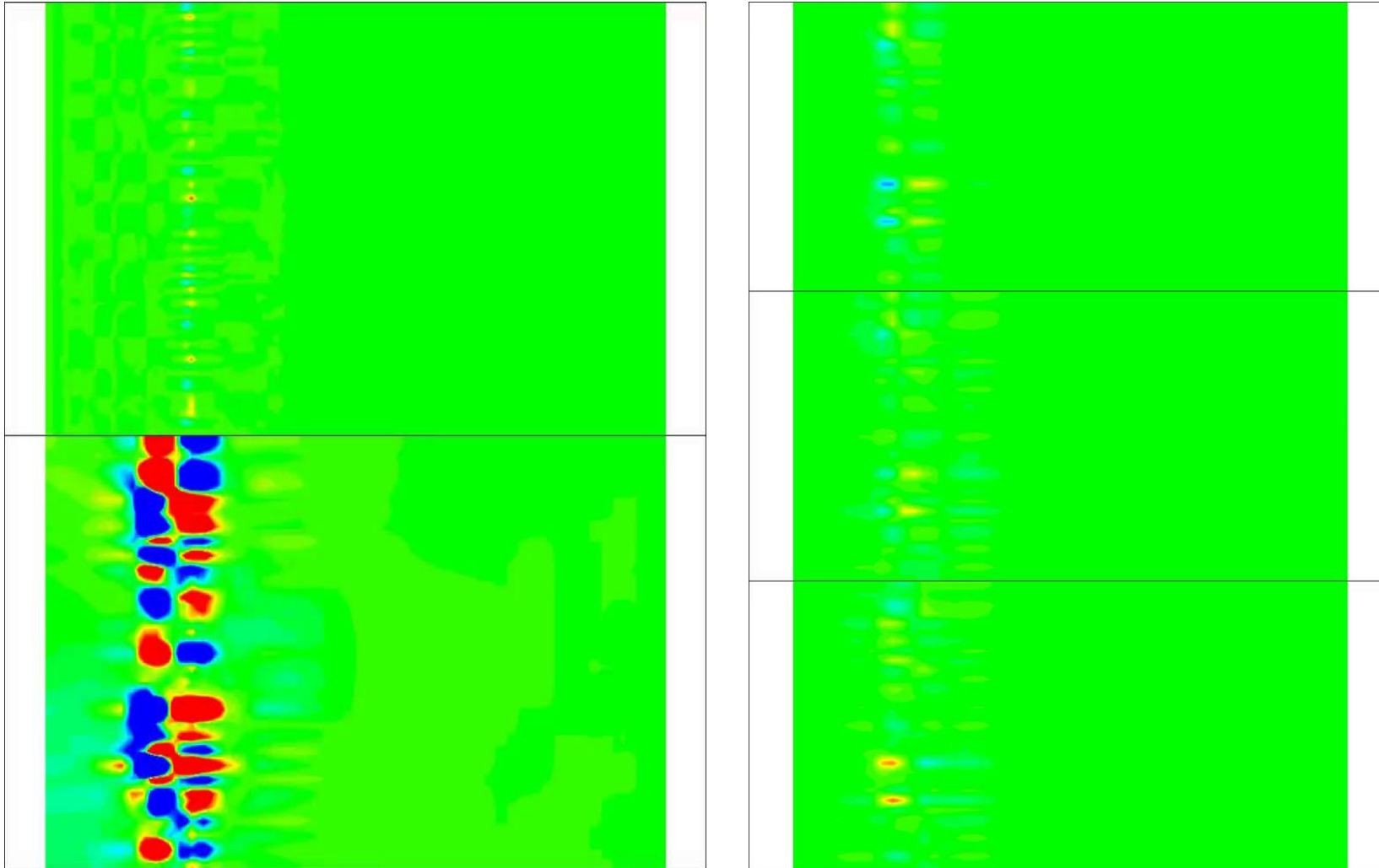
3D 密度面



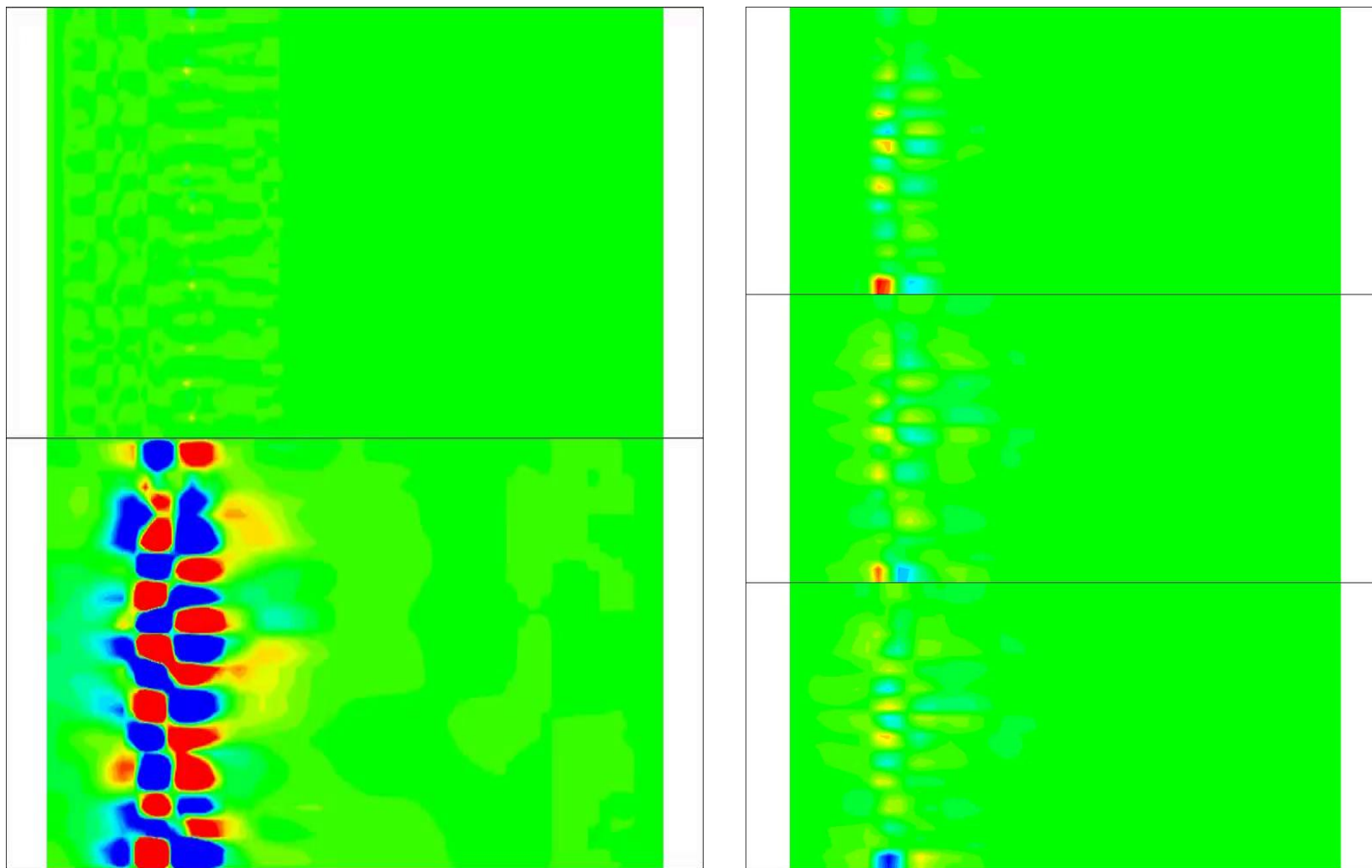
速度场 (u) 及其时空内禀基:



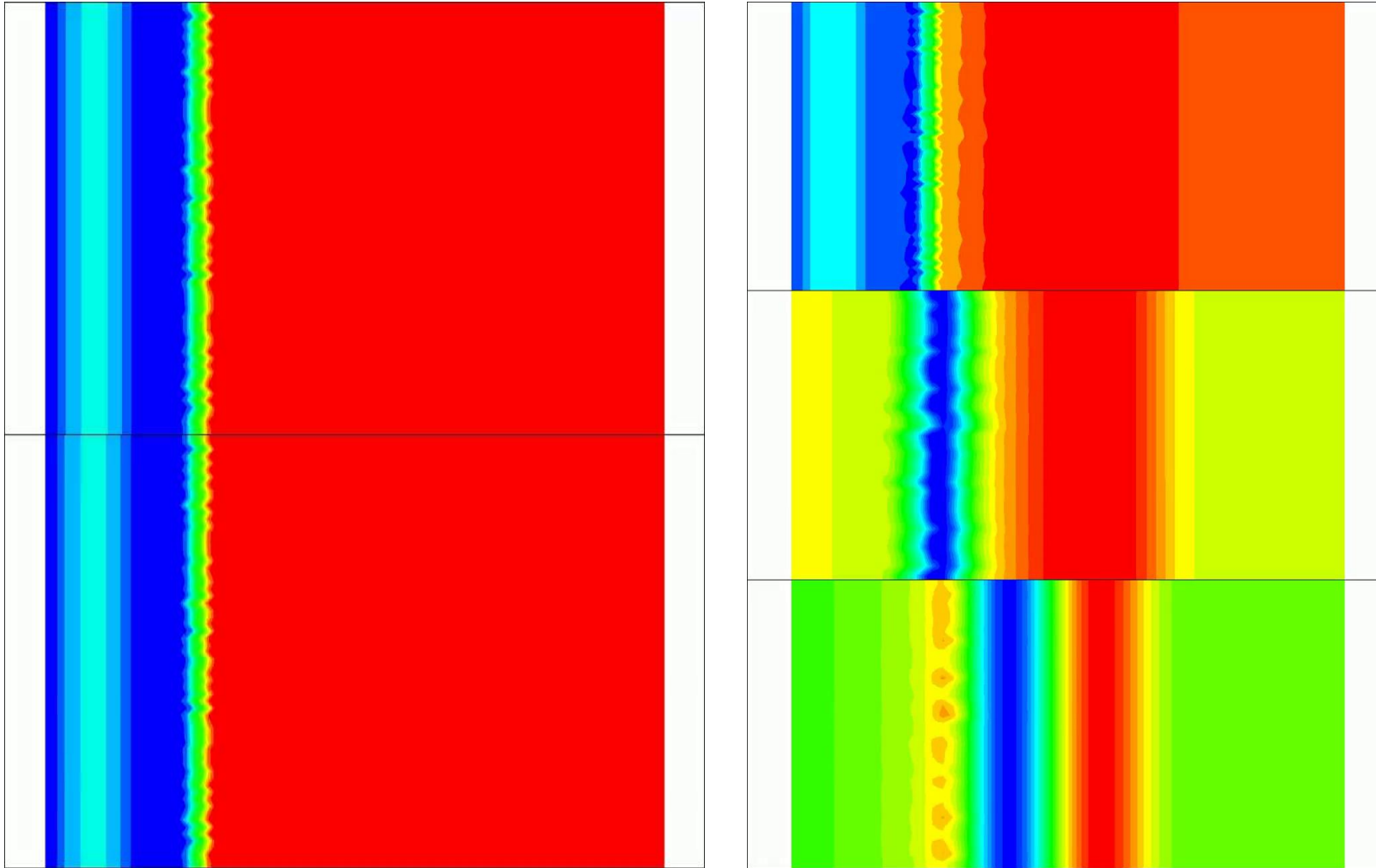
速度场 (v) 及其时空内禀基:



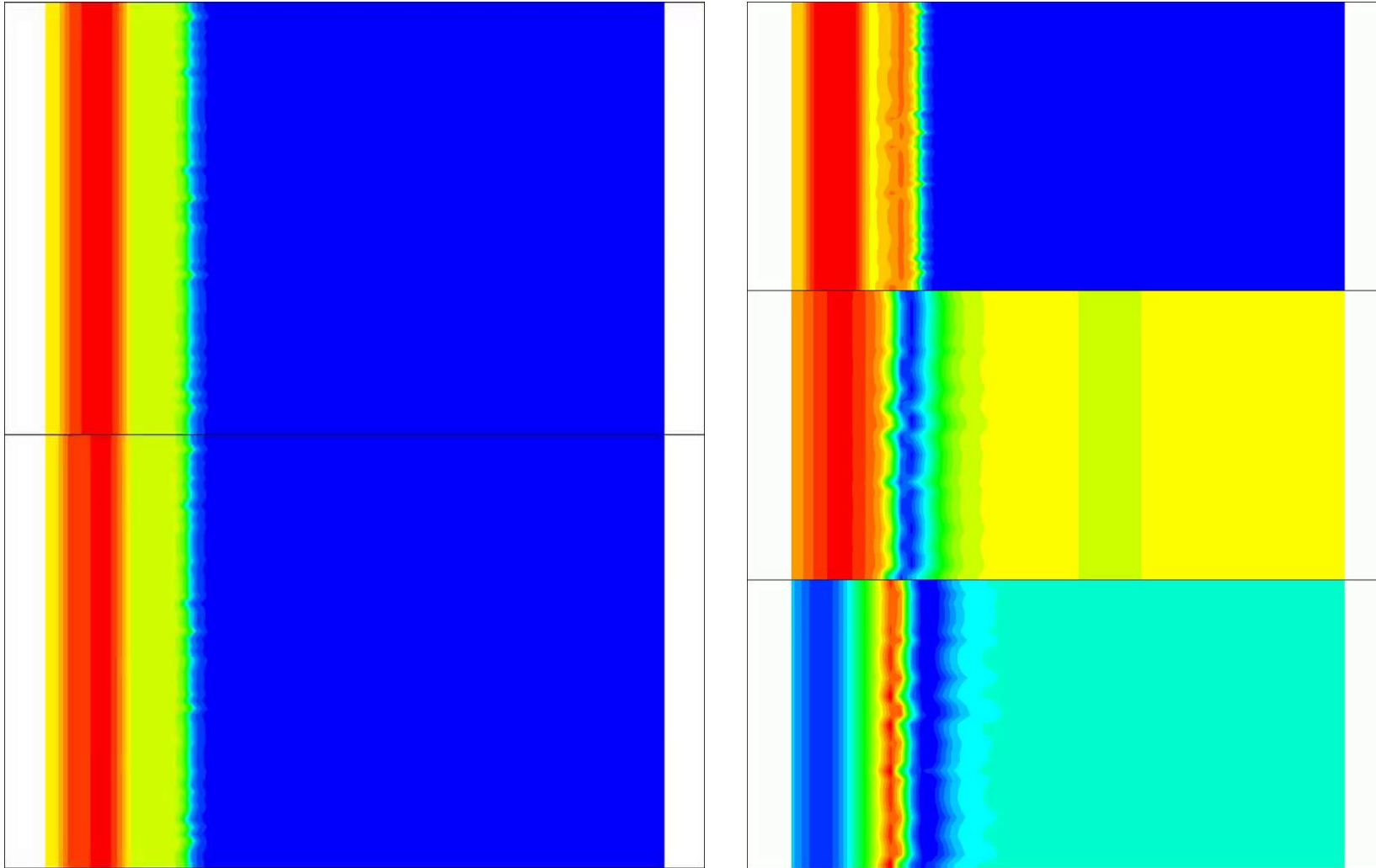
速度场 (w) 及其时空内禀基:



密度场 (ρ) 及其时空内禀基:



温度场 (T) 及其时空内禀基:



五. 创新点与后续工作

创新点

(1) 将谱分解推广到时空耦合谱分解: 将传统的基于分离变量思想、采用已知空间基函数的谱分解, 拓展为采用满足各种复杂边界条件和物理约束条件的时空耦合内禀基的时空耦合谱分解;

(2) 首次证实采用时空耦合基可得到与计算流体力学数值解定量比对的可压缩 Navier-Stokes 方程的低维动力系统近似解:

(3) 首次实现可压缩 Navier-Stokes 方程的低维动力系统近似解与计算流体力学数值解的定量比对: 从而保证了时空耦合低维动力系统的近似解在计算流体力学数值解 (及无穷维 Navier-Stokes 方程) 的吸引域中, 进而, 通过对时空耦合低维动力系统特性分析可以得到 Navier-Stokes 方程的准确动力系统特性;

(4) 首次采用可压缩 Navier-Stokes 方程的低维动力系统近似解逼近湍流大涡模拟数值解: 说明了可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合低维动力系统近似解可以包含湍流大涡模拟方程的数值解所具备的湍流特性, 由此, 通过对 Navier-Stokes 方程时空耦合低维动力系统特性分析可以得到湍流大涡模拟方程的准确湍流动力系统特性;

采用时空耦合内禀基是时空耦合低维动力系统分析的关键, 它可用维数极低的时空耦合内禀基得到与真实流动定量比对的动力系统定性分析结果, 从而保证了时空耦合动力系统特性就是真实流动 (湍流) 的动力学特性.

后续工作

发展一套与之相适应的时空耦合动力系统分析方法, 以把握真实可压缩湍流复杂时空耦合动力学演化规律与特性;

传统的偏微分方程动力系统模型均基于空间基, 其动力系统分析对象仅限于空间基函数的系数的时间演化特性, 如分叉与混沌等.

由于本研究提出了时空耦合低维动力系统建模理论, 得到了与无穷维动力系统解定量可比的时空耦合低维动力系统模型, 为了解包括可压缩湍流在内的复杂流动的时空复杂动力系统特性提供了新的研究思路和可能.

第二部分：湍流数值模拟建模理论基础再探究

六. 湍流数值模拟建模理论基础

- 令 Navier-Stokes 方程为 $NS=0$, 湍流直接数值模拟方程 $DNS=0$;
- 湍流雷诺平均运算为 $\bar{\quad}$, 湍流雷诺平均方程为 $RANS=0$, 湍流脉动方程为 $FLUC=0$;
- 滤波运算为 $\bar{\quad}$, 湍流大涡模拟方程为 $LES=0$, 湍流亚网格小尺度方程为 $SGS=0$;
- 大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法的大尺度方程 $LSC=0$, 湍流小尺度最优低维动力系统方程 $SODS=0$.

传统的湍流数值模拟建模理论基础及其错误

传统的湍流数值模拟建模理论包含湍流模式理论和湍流大涡模拟方法. 其基本思想如下.

$$\text{湍流模式理论: } \begin{cases} \overline{NS} = \text{RANS} \\ NS - \text{RANS} = \text{FLUC} \end{cases}$$

$$\text{湍流大涡模拟方法: } \begin{cases} \overline{NS} = \text{LES} \\ NS - \text{LES} = \text{SGS} \end{cases}$$

$$\text{湍流模式理论耦合求解: } \begin{cases} \text{RANS} = 0; \text{在 RANS 网格下} \\ + \\ \text{FLUC} = 0; \text{在 RANS 网格下} \end{cases} \implies NS = 0; \text{在 RANS 网格下}$$

$$\text{湍流大涡模拟耦合求解: } \begin{cases} \text{LES} = 0; \text{在 LES 网格下} \\ + \\ \text{SGS} = 0; \text{在 LES 网格下} \end{cases} \implies NS = 0; \text{在 LES 网格下}$$

- 由于在 RANS 网格或 LES 网格中的 Navier-Stokes 方程中没有湍流, 因此对在 RANS 网格或 LES 网格下的脉动方程或亚网格方程中的各项进行建模得不到正确的湍流模式. **⇒建立在 RANS 网格或 LES 网格基础上的湍流数值模拟建模理论基础是错误的.**
- 这就解释了为什么针对脉动方程各项建模的最为复杂的雷诺应力模式的计算效果反而不理想的原因.
- 在实际湍流建模中, 采用湍流实验数据或 DNS 结果对各种湍流模式进行标定以确定湍流模式参数值, 所以在实际使用的**单尺度湍流模式**通过模式参数中包含了脉动量或小尺度湍流的部分作用.
- 由于在各种湍流模式中采用了一些假设, 如各向同性等等, 因此它们在数值模拟复杂湍流时必然会在某些情形下表现不佳甚至失效.

正确的湍流数值模拟建模理论基础

- 正确的湍流数值模拟建模理论的基础是**方程 + 网格**.
- 为了算出湍流, 在 NS 方程中必须采用 DNS 网格.
- 在 LES 方程中必须采用进入惯性子区的 LES 网格.

$$\text{湍流模式理论耦合求解: } \left\{ \begin{array}{l} \text{RANS} = 0; \text{在 RANS 网格下} \\ + \\ \text{FLUC} = 0; \text{在小尺度网格下} \end{array} \right. \implies \text{NS} = 0; \text{在 DNS 网格下}$$

$$\text{湍流大涡模拟方法耦合求解: } \left\{ \begin{array}{l} \text{LES} = 0; \text{在 LES 网格下} \\ + \\ \text{SGS} = 0; \text{在小尺度网格下} \end{array} \right. \implies \text{NS} = 0; \text{在 DNS 网格下}$$

- 对脉动方程 (RANS) 或亚网格方程 (LES) 建模均须在小尺度网格下进行;
- 通过多尺度方法求得在 RANS 网格或 LES 网格中的**多尺度湍流模型**.

大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC)

- 在 DNS 中对大尺度场和小尺度场采用相同的高精度计算流体力学方法求解, 相当于用同样的大炮打飞机和蚊子;
- 基于时空耦合小尺度最优低维动力系统的大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC):
 - ★ **基本思想: 根据大小尺度流场特点采用不同的数值方法进行耦合求解;**
 - ★ 大尺度流场是湍流的主体部分, 采用高精度计算流体力学方法 (PDEs, 高精度有限体积法、差分法、谱方法等) 在大尺度网格上求解;
 - ★ 小尺度流场是湍流的次要和必不可少的部分, 采用时空耦合最优低维动力系统方法 (ODEs, ODS) 在小尺度网格上求解;
 - ★ 该算法已于 2000 年和 2009 年用于不可压湍流数值模拟, 见:
 - 吴锤结、关晖、赵红亮, 基于小尺度亚网格模式的大涡模拟方法, 《湍流理论新进展及其应用》, 上海大学出版社, 2000, 77-82.;
 - WU, C-J, GUAN, H, Lattice Boltzmann Dynamics and Dynamical System Sub-Grid Models, Mod. Phys. Lett. B, 2009, 23(3):349-352.

1. 可压缩湍流大尺度方程 (LSC):

$$\left\{ \begin{aligned} & (\bar{\rho})_{,t} + (\bar{\rho} \bar{u}_j)_{,j} = - \left(\overline{\rho' u'_j} \right)_{,j} \\ & (\bar{\rho} \bar{u}_i)_{,t} + \left[\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j + \frac{1}{\gamma M^2} \delta_{ij} \bar{\rho} \bar{T} - \frac{\mu}{Re} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{u}_{h,h}) \right]_{,j} \\ & \quad = - \left(\overline{\rho' u'_i} \right)_{,t} + \left(\bar{\rho} \overline{u'_i u'_j} + \bar{u}_i \overline{\rho' u'_j} + \bar{u}_j \overline{\rho' u'_i} + \overline{\rho' u'_i u'_j} + \frac{1}{\gamma M^2} \delta_{ij} \overline{\rho' T'} \right)_{,j} \\ & \left[\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \bar{\rho} \bar{T} + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}_h \bar{u}_h \right]_{,t} + \left[\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_j + \frac{1}{2} \bar{\rho} \bar{u}_h \bar{u}_h \bar{u}_j + \frac{1}{\gamma M^2} \bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_j \right. \\ & \quad \left. - \frac{\kappa}{PrRe(\gamma-1)M^2} \bar{T}_{,j} - \frac{\mu}{Re} (\bar{u}_{i,j} \bar{u}_i + \bar{u}_{j,i} \bar{u}_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{u}_{h,h} \bar{u}_i) \right]_{,j} \\ & \quad = - \left\{ \left[\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} \overline{\rho' T'} + \frac{1}{2} (\bar{\rho} \overline{u'_h u'_h} + \bar{u}_h \overline{\rho' u'_h} + \bar{u}_h \overline{\rho' u'_h} + \overline{\rho' u'_h u'_h}) \right]_{,t} \right. \\ & \quad + \left[\frac{1}{(\gamma-1)\gamma M^2} (\bar{\rho} \overline{T' u'_j} + \bar{T} \overline{\rho' u'_j} + \bar{u}_j \overline{\rho' T'} + \overline{\rho' T' u'_j}) \right. \\ & \quad + \frac{1}{2} (\bar{\rho} \overline{u'_j u'_k u'_k} + 2\bar{\rho} \overline{u'_k u'_j u'_k} + 2\bar{u}_j \overline{u'_k \rho' u'_k} + \bar{u}_k \overline{u'_k \rho' u'_j} \\ & \quad + \bar{\rho} \overline{u'_j u'_k u'_k} + \bar{u}_j \overline{\rho' u'_k u'_k} + 2\bar{u}_k \overline{\rho' u'_j u'_k} + \rho' \overline{u'_j u'_k u'_k}) \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\gamma M^2} (\bar{\rho} \overline{T' u'_j} + \bar{T} \overline{\rho' u'_j} + \bar{u}_j \overline{\rho' T'} + \overline{\rho' T' u'_j}) - \frac{\mu}{Re} (2\overline{u'_{j,i} u'_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \overline{u'_{i,j} u'_j}) \right]_{,j} \right\} \end{aligned} \right.$$

2. 可压缩湍流小尺度时空耦合最优低维动力系统方程 (SODS):

$$\left\{ \begin{aligned} & b_{r,t} = \mathcal{A}_r^I \\ & a_{k,t} \mathcal{B}_{kr}^I + b_{l,t} \mathcal{B}_{lr}^{II} = \mathcal{B}_r^{III} \\ & c_{m,t} \mathcal{C}_{mr}^I + b_{l,t} \mathcal{C}_{lr}^{II} + a_{k,t} \mathcal{C}_{kr}^{III} = \mathcal{C}_r^{IV} \end{aligned} \right.$$

其中 $\mathcal{A}_r^I, \mathcal{B}_{kr}^I, \mathcal{B}_{lr}^{II}, \mathcal{B}_r^{III}, \mathcal{C}_{mr}^I, \mathcal{C}_{lr}^{II}, \mathcal{C}_{kr}^{III}, \mathcal{C}_r^{IV}$ 为与 $\zeta_r, \xi_{ki}, \zeta_l$ 等相关的系数.

$$\text{湍流大小尺度耦合数值模拟方法: } \begin{cases} \overline{NS} = \text{LSC} \\ NS - \text{LSC} = \text{SODS} \end{cases}$$

$$\text{湍流大小尺度耦合数值模拟求解: } \begin{cases} \text{LSC} = 0; \text{在 LSC 网格下} \\ + \\ \text{SODS} = 0; \text{在小尺度网格下} \end{cases} \implies NS = 0; \text{在 DNS 网格下}$$

- LSC 的实质是将 RANS、LES 和 DNS 统一的湍流数值模拟方法.
- 小尺度网格可取为从 $\frac{1}{2}$ LSC 网格到 DNS 网格之间的各种网格.
- 由于没有人为设定各向同性等假设, LSC 可以适应各种复杂湍流;
- 当 LSC 大尺度网格等于 DNS 网格时, 小尺度网格消失, LSC 退化为 DNS;
- LSC 的计算量介于 LES 和 DNS 之间.
- 大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC) 的理论研究已经完成, 程序研制正在进行中.
- 在大小尺度时空耦合湍流数值模拟过程中必然会遇到湍流封闭性问题.

七. 湍流封闭性问题及其数值解法

- 湍流封闭性问题的本质:

- ★ 在求解小尺度动力系统方程时, 必须给出小尺度高阶滤波关联项的方程, 因此产生湍流数值模拟中无法解决的封闭问题.
- ★ 湍流封闭性问题的本质在于小尺度量与小尺度高阶滤波关联项的**同时性**.

- 湍流封闭性问题的数值解法:

- ★ 可采用大尺度方程与小尺度动力系统方程交替耦合求解的方法, 采用上一时刻得到的小尺度量求出小尺度高阶滤波关联项, 即小尺度量与小尺度高阶滤波关联项**不具同时性**, 这样即可通过数值方法解决湍流封闭性问题.

- 该数值解法已于 2000 年和 2009 年用于不可压湍流数值模拟, 见:

- ★ 吴锤结、关晖、赵红亮, 基于小尺度亚网格模式的大涡模拟方法, 《湍流理论新进展及其应用》, 上海大学出版社, 2000, 77-82.;
- ★ WU, C-J, GUAN, H, Lattice Boltzmann Dynamics and Dynamical System Sub-Grid Models, Mod. Phys. Lett. B, 2009, 23(3):349-352.

八. 结论

- 提出了可压缩湍流时空耦合低维动力系统建模方法, 首次实现可压缩 Navier-Stokes 方程的时空耦合极低维动力系统近似解与计算流体力学数值解的定量比对;
- 指出了传统的湍流数值模拟建模理论基础的错误, 并给出了正确的湍流数值模拟建模理论基础;
- 提出了大小尺度时空耦合湍流数值模拟方法 (LSC);
- 给出了湍流封闭性问题的数值解法.

